Die Bestimmung optimaler Bedienungssysteme bei Mehrstellenarbeit

— Probleme und Lösungsmöglichkeiten —

Inauguraldissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Wirtschaftswissenschaften
(doctor rerum oeconomicarum)
der Rechts- und Wirtschaftswissenschaftlichen
Fakultät der Universität des Saarlandes

von

Dipl.-Kfm.
KLAUS DELLMANN
aus Berlin

Saarbrücken 1968

1969

Die Bestimmung optimaler Bedienungssysteme bei Mehrstellenarbeit

— Probleme und Lösungsmöglichkeiten —

Inauguraldissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Wirtschaftswissenschaften
(doctor rerum oeconomicarum)
der Rechts- und Wirtschaftswissenschaftlichen
Fakultät der Universität des Saarlandes

von

Dipl.-Kfm.
KLAUS DELLMANN
aus Berlin

Saarbrücken 1968

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der Disputation: 6. Februar 1969

Dekan: Prof. Dr. Hans Zacher
Erstberichterstatter: Prof. Dr. Wolfgang Kilger
Zweitberichterstatter: Prof. Dr. Herbert Hax

Vorwort

In Betrieben mit automatisierter Fertigung gehört die Bestimmung optimaler Bedienungssysteme zu den Planungsproblemen des Fertigungsbereichs. Das Anliegen dieser Arbeit besteht darin, Probleme und Lösungsmöglichkeiten bei der Ermittlung optimaler Bedienungssysteme für deterministische und stochastische Mehrstellenarbeit aufzuzeigen. Es wurde versucht, nicht bei einer rein formal-mathematischen Analyse der Technologie der Mehrstellenarbeit zu verbleiben - wie dies häufig in der Literatur zur Mehrstellenarbeit geschieht - ,sondern Kriterien herauszuarbeiten, die es erlauben, eine ökonomisch sinnvolle Zuordnung der Produktionsfaktoren menschlicher Arbeit und Betriebsmittel zu finden. Hierzu ist es notwendig, mögliche Zielvorstellungen gegenüberzustellen, das Mengen- und Wertgerüst des Kombinationsprozesses bei Mehrstellenarbeit zu erforschen und funktionale Beziehungen aufzudecken. Im Anschluß daran werden zur Untersuchung der hier anstehenden ökonomischen Entscheidungsprobleme mathematische Modelle konstruiert und benutzt.

Das erste Hauptkapitel hat einführenden Charakter. Grundbegriffe und Grundlagen der Mehrstellenarbeit werden aufgezeigt. Anschließend wird eine Klassifizierung von Grundformen der Mehrstellenarbeit vorgenommen. Eine Analyse von Arbeiter- und Betriebsmittelzeiten, die als "Mengengerüst" in den nachfolgenden Ausführungen benötigt werden, schließt sich an. Besondere Aufmerksamkeit wird der Ermittlung von Wegzeiten gewidmet, da die hierbei auftretenden Probleme in der Literatur kaum oder gar nicht behandelt werden. Den Abschluß des ersten Kapitels bildet eine kurze Darstellung der funktionalen Zusammenhänge zwischen Arbeiter- und Betriebsmittelzeiten.

Die sich aus der Kombination der Faktoren "Arbeit" und "Betriebsmittel" ergebenden ökonomischen Probleme werden im zweiten Kapitel erörtert. Zunächst werden in der Literatur vertretene Zielvorstellungen, nach denen die Kombination vollzogen werden soll, dargestellt und kritisch untersucht. Kostenminimierung für eine gegebene Ausbringungsmenge oder Gewinnmaximierung als Zielsetzung werden für die weiteren Ausführungen allein als wirtschaftlich bedeutsam unterstellt. Es folgt eine kurze Darstellung der für die Zielfunktionen relevanten Kosten- und Erlöskomponenten - das "Wertgerüst" des Kombinationsprozesses.

Im d r i t t e n K a p i t e l wird eine kurze Einführung in die Theorie der Warteschlangen unter besonderer Berücksichtigung der Mehrstellenarbeit gegeben; einige Grundbegriffe werden erläutert. Eine knappe Beschreibung der Lösungsmethoden stochastischer Wartemodelle erschien uns zum besseren Verständnis der im fünften Kapitel aufgezeigten Modelle angebracht.

Das Kernstück des v i e r t e n K a p i t e l s ist die Beschreibung eines allgemeinen Modells zur Bestimmung von Arbeiter- und Betriebsmittelzeiten. Ein vergleichbares Modell für deterministische Mehrstellenarbeit existiert unseres Wissens in der Literatur nicht. Das Modell wird ausgewertet. Numerische Beispiele wurden mit Hilfe elektronischer Datenverarbeitungsanlagen durchgerechnet. (Vgl. Anhang I und II). Im Anschluß daran erfolgt die Beschreibung von Methoden zur Bestimmung kostenoptimaler bzw. gewinnmaximaler Bedienungssysteme, jeweils getrennt für im Zeitlohn bzw. im Akkord entlohnte Arbeitskräfte.

Das f ü n f t e K a p i t e l ist der Darstellung stochastischer Modelle gewidmet. Es wurden zwei große Modellgruppen unterschieden: Mehrstellenarbeit mit Anforderungsbedienung, Mehrstellenarbeit mit Turnusbedienung. Für jede der beiden Modellgruppen wird ein Modell ausführlich beschrieben und dargestellt. Kleine numerische Beispiele erläutern die Modelle. Alle im fünften Kapitel aufgeführten Modelle liefern jedoch nur die für ökonomische Entscheidungsprobleme erforderlichen Parameter. Stellvertretend für alle behandelten Modelle wurde die ökonomische Folgerechnung für das Modell von C. Palm aufgezeigt.

Zur Darstellung unserer Arbeit sei noch folgendes angemerkt: Wegen des begrenzten Vorrats an Kurzzeichen war uns die ausschließlich einmalige Benutzung bestimmter Kurzzeichen nicht möglich. Soweit dies für das Verständnis der Arbeit erforderlich war, wurden deshalb die Kurzzeichen an Ort und Stelle definiert.

Um bei der Numerierung von Formeln die Übersichtlichkeit zu wahren, besteht die Nummer einer Formel aus zwei Teilen: der erste Teil definiert das Kapitel, in dem die Formel zu finden ist, der zweite Teil ist eine innerhalb des Kapitels fortlaufende Nummer.

Die Nummern in ( ) hinter den Autorennamen in den Fußnoten und Anmerkungen beziehen sich auf die im Literaturverzeichnis zusammengestell-

ten Bücher, Dissertationen und Zeitschriftenaufsätze.

Am Ende der Arbeit findet sich eine Liste häufig benutzter Symbole.

An dieser Stelle möchte ich meinem akademischen Lehrer, Herrn Professor Dr. Wolfgang K i l g e r, für die zahlrechen Anregungen und die großzügige Unterstützung bei der Abfassung der Arbeit danken. Danken möchte ich ferner Herrn Professor Dr. Rudolf G ü m b e l und Professor Dr. Herbert H a x, die mir Gelegenheit gaben, einige Abschnitte dieser Arbeit in ihren Seminaren zur Diskussion zu stellen.

Für die kritische Durchsicht des Manuskripts danke ich Herrn Dipl.-Math. Norbert B e c k e r, sowie Herrn Dipl.-Kfm. Lothar H a b e r s t o c k und Herrn Dipl.-Kfm. Ludwig N a s t a n s k y. Ihre ständige Diskussionsbereitschaft, ihre Hinweise und Anregungen waren mir sehr behilflich. Besonders danke ich Fräulein Edda G r ä b e r und Fräulein Sylvia S c h ä f e r für die große Mühe beim Schreiben des Manuskripts.

Saarbrücken, Dezember 1968

Klaus Dellmann

Inhaltsverzeichnis

		Seite
1	Grundlagen und Grundbegriffe der Mehrstellenarbeit	1
11	Grundlagen der Mehrstellenarbeit	1
111	Zum Begriff der Mehrstellenarbeit	1
112	Bestimmungsfaktoren der Mehrstellenarbeit	3
113	Grundformen der Mehrstellenarbeit	5
12	Grundbedingungen der Mehrstellenarbeit	5
13	Grundformen der Bedienung bei Mehrstellenarbeit	7
131	Anforderungsbedienung	7
132	Turnusbedienung	8
14	Die Gliederung der Arbeiter- und Betriebsmittelzeiten bei Mehrstellenarbeit	10
141	Die Analyse der Arbeiterzeit	11
1411	Die Tätigkeitszeit	11
14111	Die Verrichtungszeit	11
14112	Die Überwachungszeit	12
14113	Die Wegzeit	12
1412	Die Wartezeit	29
142	Die Analyse der Betriebsmittelzeit	31
1421	Die Nutzungszeit	31
1422	Die Brachzeit	32
143	Die Beziehungen zwischen Arbeiter- und Betriebsmittelzeiten	34
1431	Die Beziehungen zwischen Brach- und Wartezeiten bei deterministischer Mehrstellenarbeit	36
1432	Die Beziehungen zwischen Brach- und Wartezeiten bei stochastischer Mehrstellenarbeit	52
144	Zeitkenngrade bei Mehrstellenarbeit	63
2	Das Problem der Zielsetzung für die Bestimmung des Bedienungssystems	66
21	Darstellung möglicher Zielvorstellungen und deren Kritik	66
22	Relevante Daten zur Bestimmung des Bedienungssystems bei Kostenminimierung	77

221 Grundsätze und Prämissen bei Kostenminimierung 77
222 Die Ermittlung der für Bedienungssysteme relevanten Kosten 79
2221 Die Kosten des Faktors "menschliche Arbeit" 80
2222 Die Kosten des Faktors "Betriebsmittel" 89
2223 Sonstige relevante Kosten 91
23 Relevante Daten zur Bestimmung des Bedienungssystems bei Gewinnmaximierung 92
231 Bestimmungsfaktoren des Absatzvolumens 92
232 Die Berücksichtigung des Preis-Mengen-Zusammenhangs im Planungsmodell 93

3 Grundlagen und Definitionen zu einer allgemeinen Theorie der Bedienungssysteme (Theorie der Warteschlangen) 97
31 Gegenstand der Warteschlangentheorie 97
32 Allgemeine Beschreibung von Wartesystemen unter besonderer Berücksichtigung der Mehrstellenarbeit 98
321 Offene und geschlossene Systeme 98
322 Der Input 100
323 Die Auswahlordnung 111
324 Das Bedienungssystem 114
325 Die Systematik von D.G. Kendall 122
33 Mathematische Methoden der Warteschlangentheorie 123
331 Problematik 123
332 Modelle mit Markov-Eigenschaft 124
333 Lösungsmethoden bei Markovschen Modellen 127
334 Allgemeine Modelle 128
335 Lösungsmethoden bei allgemeinen Modellen 128

4 Modelle zur Bestimmung optimaler Bedienungssysteme bei deterministischer Mehrstellenarbeit 131
41 Die Bestimmung optimaler Bedienungssysteme als Teilproblem der Arbeitsablaufplanung 131
42 Die Methoden der Planung von Bedienungssystemen 131
43 Beschreibung eines allgemeinen Modells zur Bestimmung von Arbeiter- und Betriebsmittelzeiten 133
431 Aufgabenstellung 133
432 Grundlagen und Prämissen des Modells 134
433 Formulierung des Modells 138
434 Auswertung des Modells 149

44 Die Bestimmung kostenoptimaler Bedienungssysteme 153
441 Entlohnung der Arbeitskräfte im Zeitlohn 153
442 Entlohnung der Arbeitskräfte im Akkord 155
45 Die Bestimmung gewinnmaximaler Bedienungssysteme und ihre Probleme 157
451 Probleme bei der Bestimmung gewinnmaximaler Bedienungssysteme 157
452 Die Bestimmung gewinnmaximaler Bedienungssysteme bei bekannter Maschinenbelegung 160
4521 Entlohnung der Arbeitskräfte im Zeitlohn 160
4522 Entlohnung der Arbeitskräfte im Akkord 162

5 Modelle zur Bestimmung optimaler Bedienungssysteme bei stochastischer Mehrstellenarbeit 164
51 Modellgruppe I: Anforderungsbedienung 164
511 Modell: Grundform 1 der Mehrstellenarbeit; exponentielle Verteilung der Bedienungszeiten. Das Modell von C. Palm (M/M/s) 164
5111 Prämissen und Darstellung des Modells 164
5112 Die Bestimmung des kostenminimalen Bedienungssystems 181
5113 Die Bestimmung des gewinnmaximalen Bedienungssystems 184
5114 Der Einfluß mehrstelliger Gruppenarbeit auf die Effizienz des Bedienungssystems 185
512 Modelle der Grundform 1 mit nicht-exponentieller Verteilung der Bedienungszeiten 187
5121 Konstante Bedienungszeiten; das Modell von H. Ashcroft (M/D/1) 187
5122 Erlang-Verteilung der Bedienungszeiten; das Modell von E. Daru ($M/E_k/1$) 189
5123 Allgemeine Verteilung der Bedienungszeiten; das Modell von L. Takacs (M/G/1) 191
513 Ein Modell mit einer allgemeinen Verteilung der Zwischenankunfts- und Bedienungszeiten; das Modell von N. Becker 191
52 Modellgruppe II: Turnusbedienung 193
521 Modell: Grundform 1 der Mehrstellenarbeit; konstante Bedienungs- und Wegzeiten. Das Modell von Mack-Murphy-Webb (M/D/1) 193
5211 Prämissen und Darstellung des Modells 193
5212 Ein Zahlenbeispiel 201
522 Sonstige Modelle der Gruppe II 206
53 Kritik und Erweiterungen 207

6 Abkürzungsverzeichnis 211

7 Literaturverzeichnis 212

8 Einige häufig benutzte Symbole 228

9 Anhang 230

Anhang I: Ein Modell zur Berechnung von Arbeiter- und Betriebsmittelzeiten bei deterministischer Mehrstellenarbeit (Computer-Ausgabe) 230

Anhang II: Beispiel zur Gewinnmaximierung bei deterministischer Mehrstellenarbeit 234

1 GRUNDLAGEN UND GRUNDBEGRIFFE DER MEHRSTELLENARBEIT

Mit zunehmender Mechanisierung der Produktion setzt sich in vielen Industriebetrieben die Bedienung mehrerer Arbeitsstellen durch eine Arbeitskraft oder eine Gruppe von Arbeitskräften mehr und mehr durch. Trotz aller Verschiedenartigkeiten in den einzelnen Produktionszweigen lassen sich bestehende Gemeinsamkeiten aufzeigen und analysieren.

11 Grundlagen der Mehrstellenarbeit

111 Zum Begriff der Mehrstellenarbeit

Unter M e h r s t e l l e n a r b e i t[1] versteht man die Tätigkeit einer Arbeitskraft (mehrstellige Einzelarbeit) oder einer Gruppe von Arbeitskräften (mehrstellige Gruppenarbeit) in einem bestimmten Zeitraum an gleich- oder verschiedenartigen Arbeitsstellen, die den Herstellungsprozeß eines bestimmten Arbeitsgegenstandes selbständig, gleichzeitig und unabhängig voneinander ausführen. Die Arbeitsstellen können dabei mit homogenen oder heterogenen Arbeitsgegenständen belegt sein.[2]

Im folgenden soll der Fall der mehrstelligen Einzelarbeit stets als Spezialfall der mehrstelligen Gruppenarbeit mit der Besetzungszahl 1 (eins) behandelt werden.

Der gesamte Bedienungsbereich einer Gruppe von Arbeitskräften wird als A r b e i t s p l a t z bezeichnet.

Jeder Arbeitsplatz bei Mehrstellenarbeit besteht aus mindestens zwei, meist aber mehr A r b e i t s s t e l l e n. Hierbei handelt

---

1) Synonym werden in der deutschsprachigen Literatur folgende Begriffe verwendet: Mehrarbeitsstellenbedienung, Mehrfachbedienung, Mehrmaschinenarbeit, Mehrmaschinenbedienung, Mehrstellenbedienung, Mehrstellenfertigung, Mehrstellensystem, Mehrplatzarbeit, Vielstellenbedienung. Speziell in der Textilindustrie: Mehrstuhlarbeit, Mehrstuhlbedienung, Mehrstuhlsystem. In der anglo-amerikanischen Literatur spricht man allgemein von "machine interference".

2) Diese Definition der Mehrstellenarbeit wurde in enger Anlehnung an das AUTORENKOLLEKTIV (6), S. 11, vorgenommen. Ähnliche Begriffsbestimmungen findet man z. B. bei ALBERS (1), S. 29-31; FRACKENPOHL (60), S. 36; RIES (163), S. 5; TIMME (192), S. 138-141 und (193), S. 5-6; VILLERS (198), S. 22; WEDEKIND (203), S. 6 und (209), S. 446; WINKEL (218), S. 7

es sich entweder um mehrere voneinander getrennte Betriebsmittel[1] oder um mehrere Arbeitsstellen, die sich an einer größeren Anlage befinden.[2]

a) b)

----- Arbeitsplatz
| Arbeitsstelle

Abb.1: Mehrstellenarbeit
a) Arbeitsplatz mit mehreren voneinander getrennten Betriebsmitteln
b) Arbeitsplatz mit mehreren Arbeitsstellen an einer Anlage

Bei mehrstelliger Gruppenarbeit sind drei Fälle zu unterscheiden:

(a) das gesamte Team ist an einer Stelle s (s = 1, ..., M) des Arbeitsplatzes tätig,

(b) die Teammitglieder bedienen einzelne Stellen s, s', s'', ... ($s \neq s' \neq s'' \neq \ldots$; s, s', s'', ...= 1, ..., M)

(c) Mischformen aus (a) und (b).

In jedem Falle ist die Anzahl der zu bedienenden Arbeitsstellen höher als die Gruppengröße.

Das Hauptcharakteristikum der Mehrstellenarbeit besteht darin, daß die einzelnen Arbeitsstellen den Herstellungsprozeß eines Gutes selbständig, gleichzeitig und unabhängig voneinander ausführen. Ist dieses Kriterium nicht erfüllt, so wird die Tätigkeit einer Arbeitskraft nicht als Mehrstellenarbeit bezeichnet.

---

1) Beispiel: Mehrere Webautomaten in einem Websaal

2) Beispiel: Rundwirkstühle, Rundstrickmaschinen. Hier ist jede Mailleuse bei Wirkstühlen bzw. jedes System bei Rundstrickmaschinen als Arbeitsstelle anzusehen. Vgl. ALBERS (1), S. 16. Vgl. auch RELLIGMANN (162), S. 691

112 Bestimmungsfaktoren der Mehrstellenarbeit[1)]

1. Als wichtiger Bestimmungsfaktor für die Form der Mehrstellenarbeit sind Art und Typ der an einem Arbeitsplatz installierten B e t r i e b s m i t t e l zu nennen.

Sind alle an einem Arbeitsplatz vorkommenden Betriebsmittel gleich, d.h. sind insbesondere die technischen Daten für alle Betriebsmittel gleich oder unterscheiden sich nur unwesentlich und werden alle Betriebsmittel mit der gleichen Intensität gefahren, so handelt es sich um Betriebsmittel h o m o g e n e r Art.

Von Betriebsmitteln h e t e r o g e n e r Art sei dann gesprochen, wenn sich die an einem Arbeitsplatz installierten Betriebsmittel in ihren technischen Daten oder während des gleichen Zeitraums in ihrer Ausbringung pro Zeiteinheit (Intensität) unterscheiden.

Von Bedeutung ist ferner der T y p des installierten Betriebsmittels. Hier sei unterschieden zwischen produktspeziellen Aggregaten, die jeweils nur einen ganz bestimmten Arbeitsgegenstand bearbeiten können, für den sie eigens konstruiert sind, und Mehrzweckmaschinen, die nach einem Umrüstvorgang verschiedene Arbeitsgegenstände bearbeiten können.

2. Einen zweiten Bestimmungsfaktor bildet die B e l e g u n g der Arbeitsstellen eines Arbeitsplatzes. Sind alle Arbeitsstellen mit gleichen Arbeitsgegenständen belegt, d.h. wird nur ein Erzeugnis hergestellt, so sprechen wir von homogener Belegung eines Arbeitsplatzes. Werden dagegen gleichzeitig an einem Arbeitsplatz mehrere artverschiedene Produkte erzeugt, so bezeichnen wir die Belegung des Arbeitsplatzes als heterogen.

3. Ein dritter Bestimmungsfaktor der Mehrstellenarbeit ist die Art der zeitlichen Folge der Arbeitsverrichtungen an den einzelnen Arbeitsstellen eines Arbeitsplatzes. Hier lassen sich zwei Hauptarten der Mehrstellenarbeit unterscheiden.

a) D e t e r m i n i s t i s c h e M e h r s t e l l e n a r b e i t[2)]

---

1) Vgl. hierzu: AUTORENKOLLEKTIV (6), S. 15-19; KÖB (109), S. 676

2) In der Literatur wird meist von "regelmäßiger" Mehrstellenarbeit gesprochen; vgl. z.B. WINKEL (218), S. 7. Meid und Opl sprechen von "staffelbarer" Mehrstellenarbeit; vgl. MEID (134), S. 97; OPL (149), S. 25

liegt dann vor, wenn die zeitliche Folge der Arbeitsverrichtungen, d.h. der Anfall von Bedienungsbedarf regelmäßig und periodisch wiederkehrt. Die einzelnen Arbeitsgänge können bei dieser Art der Mehrstellenarbeit in einer bestimmten Folge aneinandergereiht werden. Die Arbeit ist damit vorhersehbar und exakt planbar. Vorkommende Schwankungen der Zeiten der einzelnen Arbeitsvorgänge können vernachlässigt werden. Die Zeitspanne zwischen der Wiederholung ein und desselben Arbeitsvorganges innerhalb des gesamten Arbeitsplatzes wird als "Zykluszeit" oder "Periode" bezeichnet.

b) Von s t o c h a s t i s c h e r M e h r s t e l l e n a r b e i t[1] wollen wir dann sprechen, wenn der Anfall von Bedienungsbedarf unvorhersehbar ist und nicht periodisch wiederkehrt. Die Bezeichnung "unregelmäßige Mehrstellenarbeit" in diesem Zusammenhang ist nicht ganz korrekt, da der Anfall von Bedienungsbedarf i n s g e s a m t durchaus einer gewissen statistischen Regelmäßigkeit unterliegen und damit planbar sein kann. Betrachtet man jedoch den Einzelvorgang, für dessen Auftreten trotz bestehender Eintrittswahrscheinlichkeit der Eindruck der Unregelmäßigkeit vorhanden ist, so scheint die oben gewählte Bezeichnung vertretbar. Stochastische Mehrstellenarbeit ist also dadurch gekennzeichnet, daß Einzelvorgänge nur mit statistischen Wahrscheinlichkeiten terminiert werden können. Ein stochastischer Arbeitsablauf liegt immer dann vor, wenn an einzelnen Arbeitsstellen starke Streuungen der Teilzeiten[2] eines Arbeitsvorganges auftreten, oder wenn ein an sich deterministischer Arbeitsablauf durch Funktionsmängel des Betriebsmittels oder Qualitätsmängel des Arbeitsgegenstandes unterbrochen wird. Auf diese Weise entsteht eine unvorhersehbare Folge der Arbeitsverrichtungen. Der Planbarkeit eines solchen Arbeitsablaufs muß durch geeignete Methoden Rechnung getragen werden. Die Zykluszeit ist im Zeitablauf Schwankungen unterworfen.

---

1) Dieser Fall der Mehrstellenarbeit wird allgemein als "Mehrstellenarbeit mit unregelmäßigem Arbeitsablauf" bezeichnet; vgl. z.B. WINKEL (218), S. 7 f. Meid und Opl sprechen von "nichtstaffelbarer" Mehrstellenarbeit; vgl. MEID (134), S. 98; OPL (149), S. 26

2) Eine Erläuterung der Zeitbegriffe wird im Kapitel 14 gegeben. Die Gliederung der Arbeiter- und Betriebsmittelzeiten wird in Anlehnung an REFA vorgenommen. Vgl. WINKEL (218), S. 12 ff.

113 Grundformen der Mehrstellenarbeit

Die Konstruktion und Analyse von Modellen macht eine Formalisierung der wirklichkeitsgegebenen Tatbestände erforderlich. Aus der Vielzahl der tatsächlichen Gegebenheiten müssen durch isolierende Abstraktion die charakteristischen Sachverhalte des Untersuchungsobjekts herausgeschält werden. Auf diese Weise werden die komplexen Zusammenhänge auf vereinfachte Gedankengebilde - kurz: Modelle - zurückgeführt.[1)]

Zur Bildung charakteristischer Formen der Mehrstellenarbeit lassen sich die soeben dargestellten Bestimmungsfaktoren verwenden. Ihr Zusammenwirken führt zu acht Grundformen der Mehrstellenarbeit, die in Übersicht 1 dargestellt wurden.

Die Grundform 1 wird in der deutschsprachigen Literatur als "zeitgleiche Mehrstellenarbeit" bezeichnet, da an allen Stellen die Arbeiter- und Betriebsmittelzeiten gleich lang sind.[2)] Die übrigen Grundformen werden global als "zeitungleiche Mehrstellenarbeit" charakterisiert.[3)] Diese Einteilung ist unseres Erachtens zu grob.

12 Grundbedingungen der Mehrstellenarbeit

Die Bedienung von zwei oder mehr Arbeitsstellen ist an ganz bestimmte Mindestbedingungen geknüpft. Solche Voraussetzungen sind im einzelnen:[4)]

a) Das Vorhandensein von Betriebsmittel-Hauptzeiten[5)], die so weitgehend selbständig ablaufen, daß hierzu die Anwesenheit der Arbeitskraft nicht erforderlich ist. Diese kann in der Zwischenzeit eine andere Arbeit ausführen.

b) Die Differenz zwischen der Betriebsmittel-Nutzungszeit und der Tätigkeitszeit des Arbeiters sollte so groß sein, daß der zur Bedienung einer Arbeitsstelle nicht benötigte Teil der Betriebsmittel-Nutzungszeit ausreicht, um noch eine zweite oder weitere

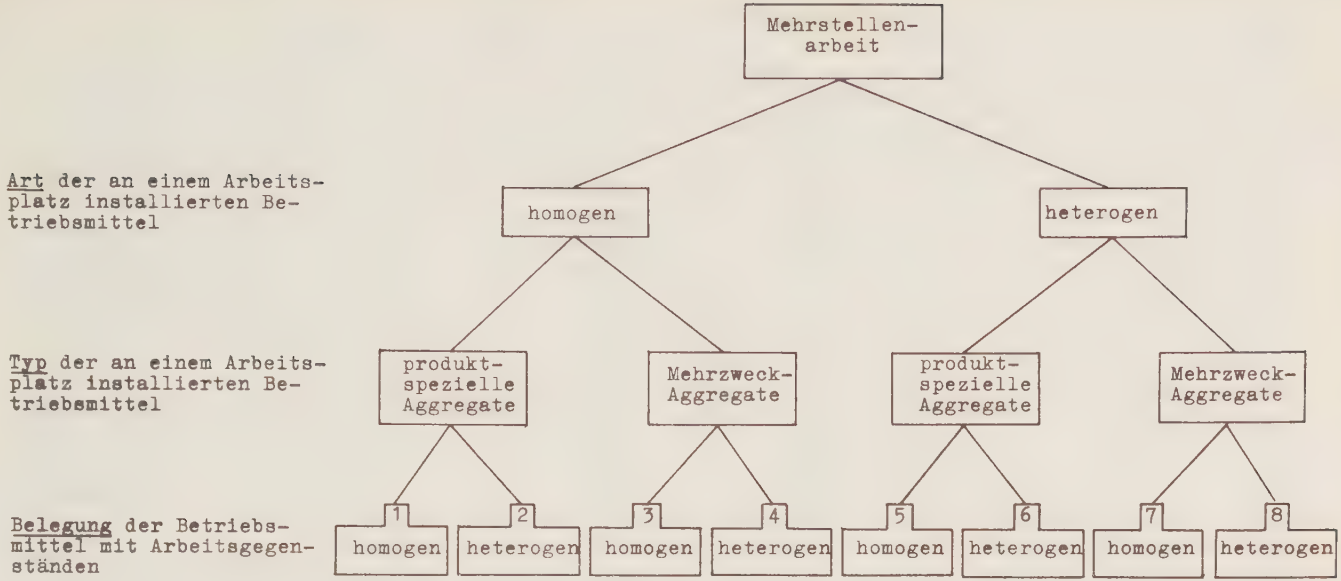
1) Vgl. KOSIOL (112), S. 318-334

2) Vgl. stellvertretend: WEDEKIND (209), S. 447; WINKEL (218), S. 8

3) Vgl. z. B. WINKEL (218), S. 8

4) Vgl. DAMS (37), S. 9 f., S. 13 f.; HAASE (79), S. 185-188; WEYER (214), S. 2

5) Eine Erläuterung der Zeitbegriffe wird im Kapitel 14 gegeben.



Übersicht 1: Grundformen der Mehrstellenarbeit

Arbeitsstellen zu bedienen. Somit muß die Tätigkeitszeit einer Arbeitskraft an einer Arbeitsstelle kleiner sein als die Betriebsmittel-Nutzungszeit.

Unter Beachtung dieser Voraussetzungen ist Mehrstellenarbeit immer dann möglich, wenn gilt:

$$\frac{\text{Betriebsmittel-Nutzungszeit}}{\text{Tätigkeitszeit}} > 1$$

13 Grundformen der Bedienung bei Mehrstellenarbeit

Bei der Bestimmung optimaler Bedienungssysteme muß der Bedienungsmethode besonderes Augenmerk geschenkt werden, da sie einen direkten Einfluß auf die technische Effizienz von Mensch-Maschine-Systemen ausübt. Hierbei sei unter B e d i e n u n g s m e t h o d e ein Satz von Regeln oder Anweisungen für die zeitliche Abfolge und Gestaltung der Bedienungsarbeit verstanden. Die Gestaltung der Bedienungsmethode ist im allgemeinen Aufgabe der Organisationsabteilung bzw. der Arbeitsvorbereitung.

Bei Mehrstellenarbeit lassen sich zwei Grundformen der Bedienung herauskristallisieren, die im konkreten Fall durch Sonderanweisungen abzuwandeln sind.

In diesem Kapitel werden nur die beiden Grundformen der Bedienungsmethode beschrieben. Spezielle Bedienungssysteme werden später im 3. Kapitel behandelt.

131 Anforderungsbedienung

Die einfachste Bedienungsmethode liegt vor, wenn eine Arbeitskraft tätig wird, sobald eine Arbeitsstelle Bedienung anfordert. Aus diesem Grunde hat man diese Form der Bedienungsmethode als A n f o r d e r u n g s b e d i e n u n g bezeichnet.[1)]

Bei Anforderungsbedienung bewegt sich die Arbeitskraft nicht nach einer planmäßigen Reihenfolge von Arbeitsstelle zu Arbeitsstelle; sie bewegt sich vielmehr je nach Anfall von Bedienungsarbeit direkt zur anfordernden Arbeitsstelle.

---

1) Vgl. AUTORENKOLLEKTIV (6), S. 20. In der Literatur wird diese Bedienungsmethode auch als "taktisch" bezeichnet; andere Autoren sprechen von "springender Arbeitsweise" oder Bedienung "im Sprung" oder auch "unrythmischer Bedienung". Gelegentlich wird auch der Terminus "Funktionsüberwachung" benutzt. In der anglo-amerikanischen Literatur findet man die Bezeichnungen "irregular patrolling" und "first-come, first-served"-Bedienung.

Die Anforderungsbedienung kann immer dann angewendet werden, wenn die Bedienungsbereiche so übersichtlich sind, daß die Arbeitskraft jederzeit die anfordernde Stelle erkennen kann. Akustische und/ oder optische Kontrolleinrichtungen können die Übersichtlichkeit eines Arbeitsplatzes erhöhen. Allgemein wird man sagen können, daß die Übersichtlichkeit mit zunehmender Arbeitsplatzgröße abnehmen wird. Mit zunehmender Arbeitsplatzgröße steigen zum anderen die von der Arbeitskraft zurückzulegenden Wege und damit die Wegzeiten. Als ein Kriterium für die Anwendung der Anforderungsbedienung kann festgehalten werden, daß kleine und übersichtliche Bedienungsbereiche vorliegen sollten.

Zweckmäßig erscheint die Anforderungsbedienung auch immer dann, wenn die zeitliche Reihenfolge der anfallenden Arbeitsverrichtungen und/ oder die Reihenfolge der anfordernden Arbeitsstellen stark streut. Diese Gegebenheiten liegen insbesondere bei stochastischer Mehrstellenarbeit vor. Die Anforderungsbedienung scheint deshalb für diese Art der Mehrstellenarbeit besonders geeignet. Die Handhabung der Anforderungsbedienung in der Praxis belegt diese These.

Ein stark zufälliger Arbeitsablauf herrscht insbesondere in der Textilindustrie vor. Infolge von zufällig auftretenden Fadenbrüchen an Webautomaten erfordern diese in unvorhersehbaren Zeitabständen an einer nicht vorherbestimmbaren Arbeitsstelle Bedienung. Bei kleinen, überschaubaren Arbeitsplätzen wird in Webereien deshalb die Anforderungsbedienung bevorzugt angewandt[1]. Wenn jedoch räumlich ausgedehnte und unübersichtliche Arbeitsplätze vorherrschen, trifft man auch in der Textilindustrie die Turnusbedienung an. In Webereien wird ein Turnus als sog. "Webergang" bezeichnet.

132 Turnusbedienung

Im Gegensatz zur Anforderungsbedienung bewegt sich bei T u r n u s b e d i e n u n g[2] die Arbeitskraft auf einer planmäßig vorgegebenen Wegstrecke von Arbeitsstelle zu Arbeitsstelle innerhalb des Arbeitsplatzes. Ein in sich abgeschlossener "Turnus"[3] liegt dann vor,

1) Vgl. AUTORENKOLLEKTIV (6), S. 21 f.

2) Vgl. AUTORENKOLLEKTIV (6), S. 23 ff. In der Literatur wird diese Bedienungsmethode auch "rythmische Bedienung", "cyclic servicing" und "regular patrolling" genannt. Mitunter wird auch vom Fall des "patrolling-" oder "walking repairman" gesprochen.

3) Die Bezeichnung "Turnus" verwendet WINKEL (218), S. 8

wenn jede Arbeitsstelle einmal passiert wurde. Auf jedem Rundgang wird jede Arbeitsstelle einer Überwachung bzw. Kontrolle unterzogen. Aufgrund dieser Kontrolle hat die Arbeitskraft zu entscheiden, ob eine Bedienung notwendig ist.

Die Turnusbedienung wird immer dann angewandt, wenn die Übersichtlichkeit des Arbeitsplatzes infolge seiner räumlichen Ausdehnung nicht mehr gegeben ist. Dies wird der Fall sein, wenn der Bedienungsbereich aus einer sehr großen Anzahl von Arbeitsstellen besteht.

Ein weiteres Auswahlkriterium für die Turnusbedienung liegt in der Wegzeit. Ist die Wegzeit im Verhältnis zur Anzahl der zu bedienenden Stellen hoch, so wird man der Turnusbedienung den Vorzug geben.

Die Turnusbedienung ist sowohl bei deterministischer als auch bei stochastischer Mehrstellenarbeit anzutreffen. Bei deterministischer Mehrstellenarbeit sind Anforderungs- und Turnusbedienung identisch, wenn Grundform 1 der Mehrstellenarbeit vorliegt und die Nutzungszeit ein ganzzahliges Vielfaches der Tätigkeitszeit ist.

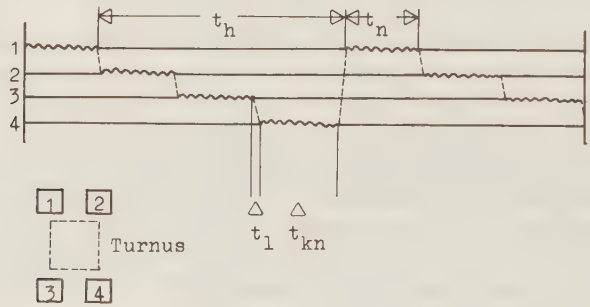


Abb.2: Anforderungs- und Turnusbedienung bei deterministischer Mehrstellenarbeit

Erläuterung der Kurzzeichen:

t_h := Hauptzeit
t_n := Nebenzeit
t_{kn} := Verrichtungszeit bei Maschinenstillstand
t_1 := Wegzeit

Im Arbeitsschaubild[1] wird dies besonders deutlich. Eine Arbeitskraft habe vier Arbeitsstellen zu bedienen. Die Betriebsmittel-Nutzungszeit beträgt 12,4 (Min./Stück)[2]. Die Tätigkeitszeit des Arbeiters beträgt 3,1 (Min./Stück)[3]. Sonstige positive Teilzeiten fallen nicht an. Aus Abbildung 2 geht hervor, daß die Arbeitskraft auf ihrem Turnus immer gerade dann an der Arbeitsstelle anlagt, wenn diese Bedienung anfordert.

14 Die Gliederung der Arbeiter- und Betriebsmittelzeiten bei Mehrstellenarbeit

Zur Bestimmung optimaler Bedienungssysteme ist es zunächst notwendig, die Tätigkeit der Arbeitskraft zu analysieren. Da sie diese Tätigkeit stets im Zusammenhang mit den ihr zugeordneten Arbeitsstellen ausführt, sind neben den Tätigkeitszeiten auch die Betriebsmittelzeiten in die Analyse einzubeziehen. Insbesondere sind folgende Fragen zu beantworten:[4]

a) Welche Arbeitsvorgänge oder Arbeitsverrichtungen sind von der Arbeitskraft auszuführen?

b) Wie groß ist der Anteil der verschiedenen Arbeitsverrichtungen an der gesamten Ausführungszeit?

c) Wie beeinflußt der Zeitaufwand der verschiedenen Arbeitsvorgänge die Bestimmung der optimalen Arbeitskräfteanzahl?[5]

Unsere Untersuchung der Arbeiter- und Betriebsmittelzeiten erstreckt sich lediglich auf diejenigen Zeitanteile, die zur Bestimmung optimaler Bedienungssysteme relevant sind, die also auf die Lage des Optimums bei der Bestimmung von Bedienungssystemen einwirken. Aus diesem Grund werden R ü s t z e i t e n nicht in die Untersuchung einbezogen. Auch Arbeiter- und Betriebsmittel-V e r t e i l z e i t e n können vernachlässigt werden.

1) Vgl. hierzu PLITT (160), S. 128; WINKEL (217), S. 77

2) Die Betriebsmittel-Nutzungszeit setzt sich zusammen aus:
9,4 (Min./Stück) Hauptzeit, 3 (Min./Stück) Nebenzeit.

3) Die Tätigkeitszeit setzt sich zusammen aus:
3 (Min./Stück) Verrichtungszeit bei Maschinenstillstand.
0,1 (Min./Stück) Wegzeit.

4) Vgl. AUTORENKOLLEKTIV (6), S. 48

5) Prämisse: gegebener Maschinenpark bzw. gegebene Arbeitsstellenanzahl.

Die Gliederung der Arbeiter- und Betriebsmittelzeiten wird in Anlehnung an REFA[1] vorgenommen, da in Deutschland die Mehrzahl der Betriebe mit der Zeitgliederung und der Verfahrenstechnik des REFA vertraut ist. Wir werden zusätzlich noch eine besondere Zeitkategorie, nämlich die W e g z e i t einführen. Als Bezugsmaß soll - wenn möglich - die Stückzeit gewählt werden. Mit gleicher Berechtigung ließe sich auch die Zykluszeit oder ein Arbeitstag wählen. Das anteilige Verhältnis der einzelnen Zeitkategorien wäre jedoch in allen Fällen das gleiche.[2]

141 Die Analyse der Arbeiterzeit

Die Ausführungszeit des Arbeiters gliedert sich in Grundzeit und Verteilzeit. Letztere kann für den betrachteten Problemkreis vernachlässigt werden. Die Arbeiter-Grundzeit gliedert sich in Tätigkeitszeit und Wartezeit.

1411 Die Tätigkeitszeit

Zur T ä t i g k e i t s z e i t zählen

- die Verrichtungszeit
- die Überwachungszeit und
- die Wegzeit.

14111 Die Verrichtungszeit

Die V e r r i c h t u n g s z e i t umfaßt die Zeitanteile für alle Verrichtungen der Arbeitskraft an Arbeitsgegenstand und Arbeitsstelle. Hierbei ist von Wichtigkeit, ob die Arbeit bei Stillstand der Arbeitsstelle oder während ihres Laufes ausgeführt wird. Entsprechend hat man zu unterscheiden zwischen Verrichtungszeit bei nicht produzierendem Betriebsmittel und Verrichtungszeit bei produzierendem Betriebsmittel. Die Verrichtungszeiten werden mit Hilfe von Zeitstudien ermittelt. Sie sind unabhängig von der Arbeiteranzahl bzw. von der Arbeitsstellenanzahl.[3]

---

1) Vgl. WINKEL (218), S. 12 ff.

2) Vgl. AUTORENKOLLEKTIV (6), S. 84. Dies gilt jedoch nur unter der Prämisse, daß alle Arbeitsstellen mit den gleichen Arbeitsgegenständen belegt sind. Ist dies nicht der Fall, so tritt zumindest bei den Weg- und Wartezeiten bzw. den Betriebsmittel-Brachzeiten ein unlösbares Zurechnungsproblem auf.

3) Vgl. WEDEKIND (207), S. 17

Wir halten fest: die menschliche Tätigkeit bei Mehrstellenarbeit kann sich vollziehen

a) bei Arbeitsstellenstillstand (bei nicht produzierender Arbeitsstelle)

b) bei Arbeitsstellenlauf (bei produzierender Arbeitsstelle)

c) sowohl bei Arbeitsstellenstillstand als auch bei Arbeitsstellenlauf.[1)]

14112 Die Überwachungszeit

Die Ü b e r w a c h u n g s z e i t umfaßt die Zeit für das Überwachen von Arbeitsgegenstand und Arbeitsstelle. Für diese Überwachung braucht die Arbeitskraft nicht unbedingt an den Arbeitsstellen zu verweilen, sondern kann sie auch während des Gehens durchführen. Der Umfang der Überwachungszeit wird durch folgende Faktoren bestimmt:[2)]

a) Art und Schwierigkeit des zu bearbeitenden Erzeugnisses,

b) Kompliziertheit, Funktionssicherheit bzw. Störanfälligkeit der zu bedienenden Arbeitsstelle,

c) Umfang und Funktonssicherheit der optischen und akustischen Überwachungseinrichtungen,

d) räumliche Ausdehnung des Arbeitsplatzes und damit verbunden seine Über- oder Unübersichtlichkeit,[3)]

e) Bedienungsmethode.

Im allgemeinen ist die Überwachungszeit von der Arbeitskräfteanzahl (Arbeitsstellenanzahl) unabhängig. Zur Abschätzung ihrer Größe kann man auf Berechnungen oder Erfahrungswerte zurückgreifen.

14113 Die Wegzeit

1. W e g z e i t ist die Zeit, die eine Arbeitskraft benötigt, um im Turnus oder auf Anforderung von einer bedienten oder kontrollierten Arbeitsstelle s zu einer zu bedienenden oder zu kontrollierenden Arbeitsstelle s' zu gehen.

Bei räumlich ausgedehnten Arbeitsplätzen kommt der Wegzeit eine besondere Bedeutung zu, da hier der Anteil der Wegzeit an der Gesamtarbeitszeit des Arbeiters hoch ist, so daß die Wegzeit die Personalkapazität erheblich beeinflussen kann.

---

1) Wenn wir von "Stillstand" bzw. "Lauf" einer Arbeitsstelle (Maschine, Aggregat) sprechen, verstehen wir immer, daß die Arbeitsstelle "nicht produziert" bzw. "produziert".

2) Vgl. AUTORENKOLLEKTIV (6), S. 55; WINKEL (218), S. 16 f.

3) Vgl. DIRKS (42), S. C/22

In der Literatur wird dieser Sonderstellung der Wegzeit unseres Erachtens nicht genügend Rechnung getragen. Nur relativ wenige Autoren beschäftigen sich explizit mit der Bestimmung von Wegzeiten[1]. In der Zeitgliederung des REFA wird die Wegzeit nicht berücksichtigt[2]. Aufbauend auf den bestehenden Arbeiten[3] wollen wir uns den Problemen der Wegzeitbestimmung etwas ausführlicher widmen.

Die Bestimmung der Wegzeiten wirft aus verschiedenen Gründen besondere Probleme auf.

1. Vorgabewerte für Wegzeiten p r o P r o d u k t e i n h e i t lassen sich nur in Sonderfällen ermitteln.
2. Die Wegzeiten hängen ab
   - von der räumlichen Anordnung der Arbeitsstellen, d.h. von der Entfernung zwischen den zu bedienenden Arbeitsstellen,
   - von der Häufigkeit, mit der eine Arbeitsstelle bedient werden muß (Bedienungsfrequenz)
   - von der Geschwindigkeit, mit welcher der Weg zurückgelegt werden kann.
3. Wird eine gegebene Anzahl von Arbeitsstellen durch eine Gruppe von Arbeitskräften bedient, so wird die Zeit, die zum Zurücklegen von Wegen erforderlich ist, geringer sein als bei mehrstelliger Einzelarbeit. Im Grenzfall, wo jeder Arbeitsstelle eine Arbeitskraft zugeordnet wird, haben die gesamten Wegzeiten den Wert Null.

2. Bei Mehrstellenarbeit setzt die ordnungsgemäße Erledigung eines Arbeitsauftrages den Gang zu derjenigen Stelle voraus, an welcher der Arbeitsauftrag ausgeführt wird. In der Vorgabezeit wird die Zeit zur Erledigung des Arbeitsauftrages erfaßt. Besteht der Arbeitsauftrag u.a. in der Bedienung einer Arbeitsstelle und wird die Bedienung durch die Bearbeitung eines Arbeitsgegenstandes verursacht, so ist zu fragen, ob die Wegzeit in allen Fällen diesem Auftrag zugerechnet werden kann. Dies ist offensichtlich nur dann der Fall, wenn die betreffende Arbeitsstelle mit einem und nur einem Arbeitsgegenstand belegt ist. Werden dagegen an einer Arbeitsstelle mehrere artverschiedene Arbeitsgegenstände bearbeitet, die in einem be-

1) Vgl. AUTORENKOLLEKTIV (6), S. 57 ff.; BEDORF (11), S. 177 f.; KÖB (109), S. 677 f.; PALM (154), S. 40 ff.; RIES (163), S. 41 ff.; WALTER (200), S. 215; WILDFEUER (215), S. 675-678 und (216), S. 1212-1213 (Die Berechnung WILDFEUERS ist unseres Erachtens nicht korrekt); SASSMANNSHAUSEN (174), S. 1220, S. 1378 und (173), S. 1156 ff.

2) Vgl. hierzu Bild 9: Die Gliederung der Vorgabezeit (Erweitertes Schema) auf S. 13 bei WINKEL (218)

3) Vgl. die in Anm. 1 angegebene Literatur.

stimmten Zeitpunkt nur eine Bedienung erfordern, so läßt sich die Wegzeit nur diesem Produktbündel zurechnen.

Unter der Annahme, daß die Wegzeit einem Arbeitsauftrag zugerechnet werden kann, ist weiterhin zu fragen, ob diese Zeit eine variable oder eine konstante Größe darstellt.
Konstant ist die Wegzeit augenscheinlich dann, wenn ex ante festgelegt ist, welche Wege der Arbeitende zu gehen hat. Dies ist bei Turnusbedienung der Fall. Hier erfolgt das Zurücklegen der Wege nach einer projektierten Marschroute.
Variabel dagegen ist die Wegzeit von der Stelle s zur Stelle s' bei Anforderungsbedienung, da hier Ausgangspunkt s und Ankunftspunkt s' im Zeitablauf variieren. Aus diesem Grund erscheint es bei Anforderungsbedienung für praktische Belange zweckmäßig zu sein, mit durchschnittlichen Wegzeiten von Stelle s nach Stelle s' zu arbeiten.

3. Die Ermittlung der Wegzeit bei Turnusbedienung konzentriert sich auf die Ermittlung der Turnuslänge, wenn man eine mittlere Gehgeschwindigkeit annimmt. Die Länge des Turnus ist von der Anordnung der Arbeitsstellen am Arbeitsplatz abhängig. Beispiele für die Gestaltung eines Turnus bei verschiedenen Anordnungsmöglichkeiten findet man bei FINDEISEN u.a.[1]. Hier sei noch kurz auf ein Problem hingewiesen. Geht man von der Überlegung aus, daß die Arbeitskraft zu Beginn der Schichtzeit ihren Turnus beginnt, in dem sie die erste Arbeitsstelle ihres Arbeitsplatzes in Gang setzt, dann die zweite Arbeitsstelle, die dritte usw., und existieren zwischen den einzelnen Arbeitsstellen des Arbeitsplatzes mehrere zulässige Wege, so erscheint es sinnvoll nach einem ersten Turnus zu suchen, bei dem die Wegzeit ein Minimum darstellt. Ein solcher Turnus kann mit Hilfe eines mathematischen Programmansatzes gefunden werden, dessen Aufbau dem Modell des "traveling-salesman problem" entspricht[2].

Diesem Ansatz liegen folgende Prämissen zugrunde:

(a) Eine Arbeitskraft hat eine gegebene Anzahl von Stellen zu bedienen.

(b) Jede Stelle muß einmal bedient werden.

(c) Die Ausgangsstelle der Arbeitskraft ist festgelegt.

1) Vgl. AUTORENKOLLEKTIV (6), S. 70, 71

2) Vgl. hierzu DANTZIG (38), S. 619-620; FLOOD (57), S. 61-75; CHURCHMAN-ACKOFF-ARNOFF (32), S. 314-318. Die Schreibweise "travelling-salesman problem" ist ebenfalls üblich.

Kurzzeichen:

T_{1T} := Wegzeit für einen Turnus

$t_{ss'}$:= Wegzeit von Stelle s zur Stelle s'

$x_{ss'}$:= Hilfsvariable mit den Werten { 0 Weg von s nach s' ist kein Bestandteil des Turnus; 1 Weg von s nach s' ist Bestandteil des Turnus }

M := Anzahl Stellen

$u_s, u_{s'}$:= Beliebige Zahlen, die einer bestimmten Stelle zugeordnet sind. Es handelt sich um Variable, die nicht-ganzzahlig sein können und keiner Nicht-Negativitätsbeschränkung unterliegen. Sie sind Unbekannte des Problems.

Eine optimale Lösung läßt sich durch Minimierung der Zielfunktion

$$(1.1.0) \qquad T_{1T} = \sum_{s=1}^{M} \sum_{s'=1}^{M} t_{ss'} \, x_{ss'} \longrightarrow \text{Min!}$$

unter den folgenden Nebenbedingungen finden.

$$(1.1.1) \qquad \sum_{s=1}^{M} x_{ss'} = 1 \qquad (s' = 2, \ldots, M)$$

$$(1.1.2) \qquad \sum_{s'=1}^{M} x_{ss'} = 1 \qquad (s = 2, \ldots, M)$$

$$(1.1.3) \qquad x_{ss'} = X_{ss'}^{2} \qquad (s,s' = 1, \ldots, M)$$

$$(1.1.4) \qquad u_s - u_{s'} + (M-1)x_{ss'} \leqslant M-2 \qquad (s,s' = 2, \ldots, M;\ s \neq s')$$

In die Zielfunktion (1.1.0) gehen alle möglichen Wege, gemessen in Zeiteinheiten zwischen den zu bedienenden Arbeitsstellen ein. Die minimale Wegzeit für einen Rundgang ist zu bestimmen. Die Nebenbedingung (1.1.1) besagt (zusammen mit der Bedingung (1.1.3)), daß nach Stelle s' ein Weg hinführen muß. Entsprechend beinhaltet die zweite Nebenbedingung (1.1.2), daß von Stelle s ein Weg hinausführen muß. Die Bedingung (1.1.3) kann nur für die Werte Null oder Eins erfüllt sein. Der letzte Satz von Nebenbedingungen (1.1.4) ist immer dann verletzt, wenn eine ganzzahlige Lösung der Bedingungen

(1.1.1) und (1.1.2) vorliegt, die k e i n e n Turnus darstellt. Denn in diesem Fall treten mindestens zwei isolierte Rundwege auf. Aus dieser Bedingung folgt weiter, daß die Diagonalelemente x_{ss} nicht größer Null sein können. Auf einen Beweis sei an dieser Stelle verzichtet[1].

Ist die Turnuslänge bestimmt, so hängt die zeitliche Inanspruchnahme der Arbeitskraft durch Zurücklegen von Wegen von der Häufigkeit ab, mit der ein Turnus in einem bestimmten Zeitraum (z.B. pro Schicht) wiederholt werden muß. Offensichtlich ist die Turnushäufigkeit in einer bestimmten Periode vom zeitlichen Abstand zweier an einer Arbeitsstelle aufeinanderfolgender Bedienungen abhängig. Die Bestimmung der Turnushäufigkeit bereitet jedoch aus folgenden Gründen erhebliche Schwierigkeiten:

(a) Zeitlich regelmäßiger Anfall von Bedienungsarbeit liegt lediglich bei der Grundform 1 vor und dort auch nur dann, wenn die Nutzungszeit ein ganzzahliges Vielfaches der Tätigkeitszeit ist.

(b) In der Regel ist die zeitliche Reihenfolge der Arbeitsverrichtungen an einem Arbeitsplatz (z.B. infolge der Belegung mit heterogenen Arbeitsgegenständen) unregelmäßig. Der zeitliche Abstand zweier an einer Arbeitsstelle aufeinanderfolgender Bedienungen kann daher nur als Durchschnittswert bestimmt werden.

(c) Bei stochastischer Mehrstellenarbeit ist der Anfall von Bedienungsbedarf in einer Zeitperiode eine Zufallsvariable. Auch ist die Zeit einer Arbeitsverrichtung an einer Arbeitsstelle meist Zufallsschwankungen unterworfen. Zwischen der Bedienungsdauer und der Turnushäufigkeit bestehen somit interdependente Beziehungen.

Um die zeitliche Inanspruchnahme des Arbeiters durch Zurücklegen von Wegen in einem bestimmten Zeitraum dennoch mit einer für praktische Belange hinreichenden Genauigkeit zu erfassen, erscheint es aus genannten Schwierigkeiten auch bei Turnusbedienung zweckmäßig, durchschnittliche Wegzeiten von Arbeitsstelle zu Arbeitsstelle in die Tätigkeitszeiten einzubeziehen.

Theoretisch müßte bei mehrstelliger Gruppenarbeit noch der Einfluß der Gruppengröße auf die Wegzeit berücksichtigt werden. Beachtet man jedoch die im Kapitel III genannten Möglichkeiten der Bedienung von Arbeitsstellen durch ein Team, so lassen sich generelle Aussagen nicht mehr machen. Bedient das Team insgesamt jeweils eine Arbeitsstelle s, so ist die Wegzeit insgesamt nicht höher als bei Einzelarbeit, da die Wege von der Gruppe gleichzeitig zurückgelegt werden. Wird dagegen für die Teammitglieder Einzelarbeit zugelassen, und gehört jede Arbeitsstelle des Arbeitsplatzes zum Bedienungs-

1) Einen Beweis findet man bei DANTZIG (38), S. 620

bereich einer Arbeitskraft, so werden die Wegzeiten insgesamt auch nicht höher ausfallen, da die Bedienungshäufigkeit einer Arbeitskraft entsprechend geringer ist. Wird dagegen der Arbeitsplatz in Teilarbeitsplätze aufgespalten, so wird die Wegzeit insgesamt bis zum Grenzwert Null sinken, nämlich dann, wenn jeder Maschine eine Arbeitskraft zugeordnet wird. Die Quote des Absinkens pro zusätzlicher Arbeitskraft kann nur unter Berücksichtigung der Anordnung des Arbeitsplatzes und der zulässigen Wege berechnet werden.

Für praktische Belange dürfte es jedoch bei mehrstelliger Gruppenarbeit zweckmäßig sein, mit den mittleren Wegzeiten zu rechnen, die für den Fall der mehrstelligen Einzelarbeit ermittelt wurden, da sonst bei Bestimmung der optimalen Gruppengröße simultan über die zeitliche Inanspruchnahme der Arbeitskräfte durch Zurücklegen von Wegen entschieden werden müßte. Dieses Entscheidungsproblem wird jedoch durch die Integration der Arbeitsstellenanordnung äußerst kompliziert, wenn nicht unlösbar.

4. Die W e g z e i t b e i A n f o r d e r u n g s b e d i e n u n g umfaßt die Zeit für den Weg, der von der (zuletzt) bedienten Arbeitsstelle zur anfordernden Stelle zurückgelegt werden muß. Geht man von der Annahme aus, daß die Wahrscheinlichkeit der Bedienungserfordernis einer Arbeitsstelle für alle Arbeitsstellen gleich ist und ferner, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Arbeitskraft bei Bedienungserfordernis einer Stelle an einer anderen Stelle steht, ebenfalls für alle Stellen gleich ist, dann lassen sich durchschnittliche Weglängen von Stelle s nach Stelle s' errechnen. Aufgrund der Annahmen folgt nämlich, daß alle Wege zwischen M Arbeitsstellen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten können.

Die durchschnittliche Weglänge von Stelle s nach Stelle s' errechnet sich dann:

$$(1.2) \qquad \bar{e}_{ss'} = \frac{\text{Summe der möglichen Weglängen}}{\text{Anzahl der möglichen Wege}}$$

Multipliziert man die durchschnittliche Weglänge mit der Gehgeschwindigkeit g, so erhält man eine mittlere Wegzeit $t_{ss'}$ von Arbeitsstelle s nach Arbeitsstelle s', die als Vorgabewert in die Tätigkeitszeit des Arbeiters einbezogen werden kann.

(1.3) $t_{ss'} = \bar{e}_{ss'} \cdot g$

Naturgemäß hängen auch bei Anforderungsbedienung die Weglängen von der Anordnung der Arbeitsstellen und den Entfernungen zwischen den Arbeitsstellen ab.

Für einige in der Praxis häufig vorkommende systematische Anordnungen von Arbeitsstellen erschien es uns sinnvoll, allgemeine Formeln zur Bestimmung mittlerer Weglängen bei Anforderungsbedienung abzuleiten. Hierbei haben wir 9 Fälle unterschieden.

Fall 1: Anordnung der Arbeitsstellen wie in Abbildung 3 dargestellt[1].

e Entfernung zwischen zwei Arbeitsstellen

Abb.3: Fall 1

Für jede Position s der Arbeitskraft gibt es M-1 mögliche Abstände zu anderen Arbeitsstellen. Die Anzahl der möglichen Wege beträgt also

(1.4) $M \quad (M - 1)$

Falls e = 1 bestehen bei 5 Arbeitsstellen folgende in Tabelle 1 aufgeführten Weglängen.

1) Vgl. auch PALM (154), S. 40 ff.

von Stelle s= / nach Stelle s'=	1	2	3	4	5
1	-	1	2	3	4
2	1	-	1	2	3
3	2	1	-	1	2
4	3	2	1	-	1
5	4	3	2	1	-

Tabelle 1: Weglängen bei 5 Arbeitsstellen

Aus Tabelle 1 lassen sich die Weglängen und deren Häufigkeiten leicht ableiten und auch allgemein darstellen.
(Vgl. Tabelle 2)

vorkommende Weglänge		Weghäufigkeit	
im Beispiel	allgemein	im Beispiel	allgemein
1	e	8	2 (M - 1)
2	2 e	6	2 (M - 2)
3	3 e	4	2 (M - 3)
.	.	.	.
.	.	.	.
M - 1	v· e	.	2 (M - v)
für $1 \leqslant v \leqslant M - 1$; v ganzzahlig!			

Tabelle 2: Weglänge und Weghäufigkeit für Fall 1

Die Summe der möglichen Weglängen ergibt sich somit

$$(1.5) \qquad \sum_{v=1}^{M-1} 2\ (M - v)\ v \cdot e$$

Die mittlere Weglänge für Fall 1 ist daher[1)]

$$(1.6) \qquad \bar{e}_{ss',(1)} = \frac{\sum_{v=1}^{M-1} 2\,(M - v)\,v \cdot e}{M\,(M - 1)}$$

Eine Umformung von (1.6) ergibt:

$$(1.7) \qquad \bar{e}_{ss',(1)} = \frac{2 \cdot e}{M - 1} \sum_{v=1}^{M-1} v - \frac{2 \cdot e}{M\,(M - 1)} \sum_{v=1}^{M-1} v^2$$

Nun ist aber

$$(1.8) \qquad \sum_{v=1}^{M-1} v = \frac{M\,(M - 1)}{2}$$

und

$$(1.9) \qquad \sum_{v=1}^{M-1} v^2 = \frac{M\,(M - 1)\,(2M - 1)}{6}$$

(1.8) und (1.9) in (1.7) eingesetzt ergibt:

$$(1.10) \qquad \bar{e}_{ss',(1)} = \frac{e\,(M + 1)}{3} \qquad \text{für } M \geqslant 2$$

Fall 2: Anordnung der Arbeitsstellen wie in Abbildung 4 dargestellt.

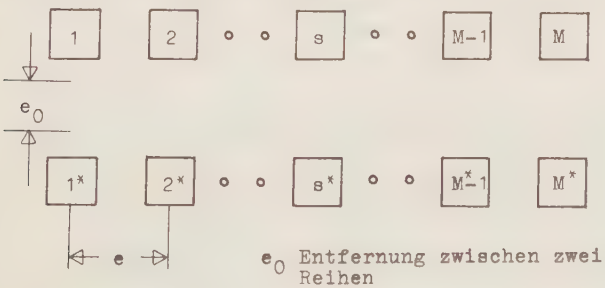


Abb.4: Fall 2

1) In $\bar{e}_{ss',(1)}$ bedeutet (1), daß es sich um die mittlere Weglänge für Fall 1 handelt.

Die kürzeste Weglänge zwischen beiden Reihen errechnet sich nach dem Satz des Phytagoras:

$$\sqrt{e_o^2 + v^2\, e^2} \qquad \text{für } 0 \leqslant v \leqslant M-1$$

Die Berechnung wird durch Wurzelausdrücke somit erschwert. Wir wollen annehmen, daß sich die Arbeitskraft niemals diagonal bewegt, sondern nur horizontal und vertikal. Die kürzeste Weglänge beträgt dann

$$(1.11) \quad e_o + v \cdot e \qquad \text{für } 0 \leqslant v \leqslant M-1$$

Die Anzahl der möglichen Wege zwischen den beiden Reihen beträgt M^2. Die verschiedenen Weglängen und deren Häufigkeiten sind in Tabelle 3 zusammengestellt.

vorkommende Weglänge	Weghäufigkeit
e_o	M
$e_o + e$	$2\,(M-1)$
$e_o + 2e$	$2\,(M-2)$
.	.
.	.
.	.
$e_o + v \cdot e$	$2\,(M-v)$
	für $1 \leqslant v \leqslant M-1$ v ganzzahlig!

Tabelle 3: Weglänge und Weghäufigkeit für Fall 2

Für die Summe der möglichen Weglängen ergibt sich:

$$(1.12) \quad S = M \cdot e_o + \sum_{v=1}^{M-1} 2\,(M-v)\,(e_o + v \cdot e)$$

Die mittlere Weglänge zwischen beiden Reihen lautet somit:

$$e_R = \frac{M \cdot e_o + \sum_{v=1}^{M-1} 2\,(M-v)\,(e_o + v \cdot e)}{M^2}$$

bzw.

$$(1.13)\quad e_R = e_0 + \frac{M^2 - 1}{3M} \cdot e$$

Die mittlere Weglänge für alle Entfernungen zwischen den 2 M Arbeitsstellen kann nun errechnet werden. Da Gleichung (1.11) für M (M - 1) Distanzen gilt und (1.13) für M^2 Entfernungen, erhält man:

$$\bar{e}_{ss'}(2) = \frac{M\,(M-1)\,\bar{e}_{ss'}(1) + M^2\, e_R}{M\,(M-1) + M^2}$$

Ersetzt man $\bar{e}_{ss'}(1)$ durch (1.11) und e_R durch (1.13), so ergibt sich schließlich:

$$(1.14)\quad \bar{e}_{ss'}(2) = \frac{M}{2M-1}\, e_0 + \frac{2\,(M^2-1)}{3\,(2M-1)}\, e$$

Fall 3: Die Arbeitsstellen sind so angeordnet wie in Fall 2, jedoch ist der Abstand zwischen s und s^* so gering, daß er vernachlässigt werden kann, also $e_0 = 0$. Die mittlere Weglänge ist dann

$$(1.15)\quad \bar{e}_{ss'}(3) = \frac{2\,(M^2-1)}{3\,(2M-1)} \cdot e$$

Fall 4: Anordnung der Arbeitsstellen, wie in Abbildung 5 dargestellt.

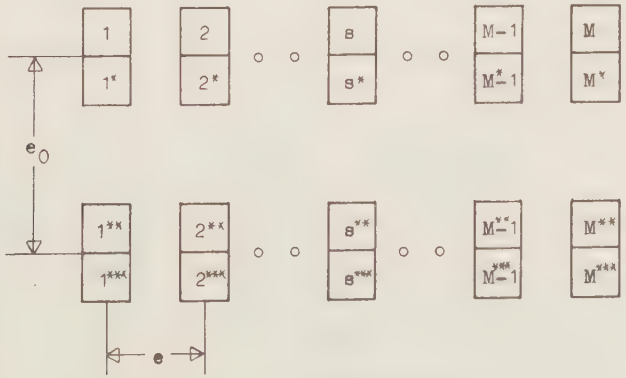


Abb.5: Fall 4

Der mittlere Abstand zwischen einer Arbeitsstelle s und einer Arbeitsstelle s' in der gleichen Reihe ist durch (1.15) gegeben. Die Anzahl der möglichen Abstände in dieser Reihe beträgt $2\,M^2 - M$. Die mittlere Entfernung zwischen einer Arbeitsstelle und den Arbeitsstellen der anderen Reihe ist durch (1.13) gegeben. Hier ist die Anzahl der möglichen Abstände $2\,M^2$. Die mittlere Weglänge für alle Distanzen ist somit:

$$\bar{e}_{ss'(4)} = \frac{(2\,M^2 - M)\,\bar{e}_{ss'(3)} + 2\,M^2\,e_R}{4\,M^2 - M}$$

bzw.

$$(1.16) \qquad \bar{e}_{ss'(4)} = \frac{2\,M}{4\,M - 1}\,e_O + \frac{4\,(M^2 - 1)}{3\,(4M - 1)}\,e$$

Bisher wurden jeweils Fälle betrachtet, bei denen die Entfernung von Stelle zu Stelle bei den horizontal angeordneten Arbeitsstellen gleich war. Wir wollen nun - analog Fall 1 - 4 - die mittlere Weglänge für den Fall errechnen, daß die Entfernung von Stelle zu Stelle wechselt.

Fall 5: Anordnung der Arbeitsstellen wie in Abbildung 6 dargestellt

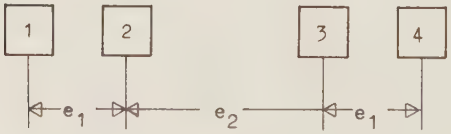


Abb.6: Fall 5

Die Ableitung der folgenden Formeln gilt nur unter der Prämisse, daß

a) $M \geqslant 4$

b) M ganzzahlig und gerade, also 4, 6, 8...

Zunächst muß die Summe der möglichen Weglängen ermittelt werden. In Tabelle 4 haben wir die Anzahl möglicher Weglängen, die vorkommenden Weglängen und die Weghäufigkeit zusammengestellt.

Anzahl möglicher Weglängen	vorkommende Weglänge	Weghäufigkeit allgemein		z.B.für M=8
1	e_1	M		8
2	e_2	M - 2		6
3	$e_1+ e_2$	2(M - 2v)	v = 1	12
4	$e_1+ e_2+ e_1$	M - 2v		6
5	$e_1+ e_2+ e_2$	M - 2v - 2		4
6	$2(e_1 + e_2)$	2(M - 2v)	v = 2	8
7	$2(e_1+ e_2) + e_1$	M - 2v		4
8	$2(e_1+ e_2) + e_2$	M - 2v - 2		2
9	$3(e_1 + e_2)$	2(M - 2v)	v = 3	4
10	$3(e_1+ e_2) + e_1$	M - 2v		2
	$\left[\frac{M}{2} - 2\right](e_1+ e_2)+ e_2$	M - 2v - 2 , v $=\frac{M}{2} - 2$		
	$\left[\frac{M}{2} - 1\right](e_1+ e_2)$	2(M - 2v)	v $=\frac{M}{2} - 1$	
$4+3\left[\frac{M}{2} - 2\right]$	$\left[\frac{M}{2} - 1\right](e_1+ e_2)+ e_1$	M - 2v		

Tabelle 4: Weglänge und Weghäufigkeit für Fall 5

Aus der Tabelle ist ersichtlich, daß für jedes beliebige M die Weglänge e_1 M-mal und die Weglänge e_2 (M - 2)-mal vorkommt. Für die übrigen vorkommenden Weglängen und deren Häufigkeiten lassen sich eindeutige Gesetzmäßigkeiten feststellen. Für die Summe der möglichen Weglängen erhält man daher:

$$(1.17)\quad S = e_1M + e_2M - 2e_2 + \sum_{v=1}^{\frac{M}{2} - 1} v(4e_1M + 4e_2M - 4e_1 - 4e_2)$$

$$- \sum_{v=1}^{\frac{M}{2} - 1} v^2(8e_1 + 8e_2) + \left[\frac{M}{2} - 1\right]\left[e_1M + e_2M\right] - \left[\frac{M}{2} - 1\right] \cdot 2e_2$$

Da nun: $\sum_{v=1}^{\frac{M}{2}-1} v = \frac{M^2}{8} - \frac{M}{4}$

und $\sum_{v=1}^{\frac{M}{2}-1} v^2 = \frac{M^3}{24} - \frac{3M^2}{24} + \frac{M}{12}$

ergibt sich für (1.17):

(1.18) $$S = M\left[\frac{M^2}{6}(e_1 + e_2) + \frac{1}{3}(e_1 - 2e_2)\right]$$

Als mittlere Weglänge erhält man schließlich:

$$\bar{e}_{ss'(5)} = \frac{M\left[\frac{M^2}{6}(e_1 + e_2) + \frac{1}{3}(e_1 - 2e_2)\right]}{M(M-1)}$$

bzw.

(1.19) $$\bar{e}_{ss'(5)} = \frac{\frac{M^2}{6}(e_1 + e_2) + \frac{1}{3}(e_1 - 2e_2)}{M-1}$$

Ist $e_1 = e_2$, so läßt sich Gleichung (1.19) unschwer in Gleichung (1.10) überführen.

Fall 6: Anordnung der Arbeitsstellen wie in Abbildung 7 dargestellt.

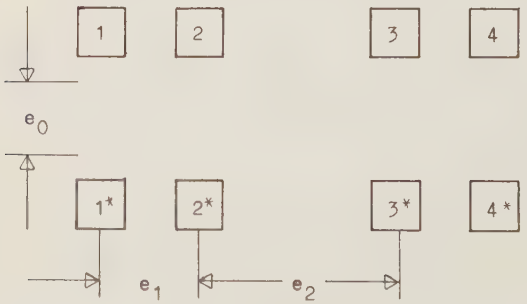


Abb.7: Fall 6

Zunächst wird wieder die Summe der möglichen Weglängen zwischen beiden Reihen errechnet; auch hier gehen wir von der Voraussetzung aus, daß sich die Arbeitskraft nur horizontal und vertikal bewegt. Vorkommende Weglängen und deren Häufigkeit sind in Tabelle 5 dargestellt.

vorkommende Weglänge	Weghäufigkeit	
e_0	M	
$e_0 + e_1$	M	
$e_0 + e_2$	$M - 2$	
$e_0 + e_1 + e_2$	$2(M - 2v)$	$v = 1$
$e_0 + e_1 + e_2 + e_1$	$M - 2v$	
$e_0 + e_1 + e_2 + e_2$	$M - 2v - 2$	
$e_0 + 2(e_1 + e_2)$	$2(M - 2v)$	$v = 2$
$e_0 + 2(e_1 + e_2) + e_1$	$M - 2v$	
$e_0 + 2(e_1 + e_2) + e_2$	$M - 2v - 2$	
⋮	⋮	
$e_0 + \left[\frac{M}{2} - 1\right] (e_1 + e_2)$	$2(M - 2v)$	$v = \frac{M}{2} - 1$
$e_0 + \left[\frac{M}{2} - 1\right] (e_1 + e_2) + e_1$	$M - 2v$	
$e_0 + \left[\frac{M}{2} - 1\right] (e_1 + e_2) + e_2$	$M - 2v - 2$	

Tabelle 5: Weglänge und Weghäufigkeit für Fall 6

Die Summe der möglichen Weglängen beträgt

$$(1.20) \quad S = M \left[\frac{M^2}{6} (e_1 + e_2) + \frac{1}{3} (e_1 - 2e_2) \right] + M^2 \cdot e_0$$

Da die Anzahl der möglichen Wege zwischen beiden Reihen M^2 beträgt, erhält man als mittlere Weglänge zwischen beiden Reihen:

$$(1.21) \quad e_{R1} = \frac{S}{M^2}$$

Die mittlere Weglänge für alle Distanzen beträgt nun analog zu Fall 2:

$$\bar{e}_{ss'(6)} = \frac{M\,(M-1)\,\bar{e}_{ss'(5)} + M^2\, e_{R1}}{M\,(M-1) + M^2}$$

Ersetzt man $\bar{e}_{ss'(5)}$ durch (1.19) und e_{R1} durch (1.21), so erhält man:

$$(1.22) \qquad \bar{e}_{ss'(6)} = \frac{M\left[\frac{M}{3}\,(e_1+e_2)+e_0\right] + \frac{2}{3}\,(e_1-2e_2)}{2M-1}$$

Fall 7: Anordnung der Arbeitsstellen wie in Fall 6; jedoch ist e_0 gleich Null

In diesem Fall kommt Gleichung (1.22) zur Anwendung. Die Größe e_0 fällt heraus:

$$(1.23) \qquad \bar{e}_{ss'(7)} = \frac{M\left[\frac{M}{3}\,(e_1+e_2)\right] + \frac{2}{3}\,(e_1-2e_2)}{2M-1}$$

Fall 8: Anordnung der Arbeitsstellen wie in Abbildung 8 dargestellt

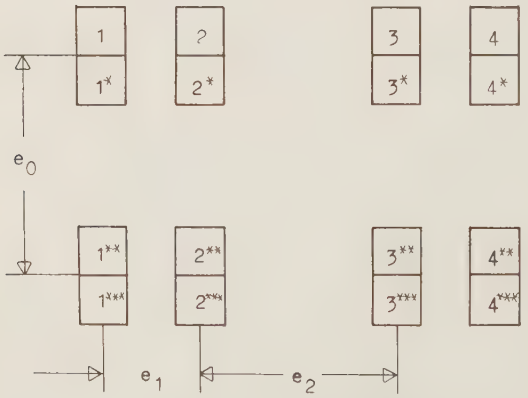


Abb.8: Fall 8

Fall 8 entspricht dem vierten Fall, so daß man hier entsprechend vorgehen kann. Als mittlere Weglänge für alle Distanzen erhält man:

$$\bar{e}_{ss',(8)} = \frac{(2M^2 - M)\ \bar{e}_{ss',(7)} + 2M^2\ e_{R1}}{4M^2 - M}$$

Ersetzt man $\bar{e}_{ss',(7)}$ durch (1.23) und e_{R1} durch (1.21), so ergibt sich:

$$(1.24)\quad \bar{e}_{ss',(8)} = \frac{2\left[\frac{M^2}{3}(e_1 + e_2) + \frac{2}{3}(e_1 - 2e_2)\right] + 2M\ e_0}{4M - 1}$$

Fall 9: Anordnung der Maschinen wie im Fall 8, jedoch ist e_1 gleich Null

Zur Anwendung gelangt Formel (1.24), die unter Beachtung von $e_1 = 0$ zu (1.25) wird.

$$(1.25)\quad \bar{e}_{ss',(9)} = \frac{2\left[\frac{M^2}{3}\ e_2 - \frac{4}{3}\ e_2\right] + 2Me_0}{4M - 1}$$

In den Fällen 1 bis 9 haben wir einige - unseres Erachtens - häufig vorkommende systematische Anordnungsmöglichkeiten von Arbeitsstellen behandelt. Auf eine Ableitung mittlerer Weglängen bei völlig willkürlich angeordneten Betriebsmitteln haben wir verzichtet, da dieser Fall in der betriebswirtschaftlichen Praxis kaum anzutreffen sein dürfte.

Aufgrund der gesetzten Prämissen wurden mittlere Weglängen errechnet. Insbesondere zur ersten Prämisse ist jedoch k r i t i s c h zu bemerken, daß realiter die Wahrscheinlichkeit der Bedienungserfordernis einer Arbeitsstelle nicht für alle Arbeitsstellen gleich sein dürfte. Dies impliziert nämlich, daß auf allen Arbeitsstellen die gleichen Arbeitsgegenstände gefertigt werden. Sind die Arbeitsstellen mit heterogenen Arbeitsgegenständen belegt, so werden die einzelnen Stellen unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten für die Erfordernis einer Bedienung aufweisen. Zwar lassen sich für diesen Fall auch mittlere Weglängen berechnen - falls die Wahrscheinlichkeiten bekannt sind -, jedoch dürfte der Aufwand hierfür in keinem Verhältnis zum Nutzen stehen, den die Kenntnis der auf diese Weise exakt ermittelten Wegzeiten bringt. Bei kleinen und mittleren Bedienungsbereichen wird eine unterschiedliche Wahrscheinlichkeitsverteilung keinen großen Einfluß auf die mittlere Weglänge haben. Wir sind daher der Ansich, daß oben abgeleitete Formeln für $\bar{e}_{ss'}$ in jedem Fall eine brauch-

bare Hilfe zur Errechnung mittlerer Wegzeiten bei Anforderungsbedienung darstellen.

1412 Die Wartezeit

Die W a r t e z e i t einer Arbeitskraft ist derjenige Teil der Arbeitszeit, in der die arbeitende Person keinerlei Belastung ausgesetzt ist; sie ist somit diejenige Zeit, in der die Arbeitskraft nicht tätig ist.

Werden an einem Arbeitsplatz heterogene Arbeitsgegenstände hergestellt, so ist die während eines bestimmten Zeitraums auftretende Wartezeit den einzelnen Produkten nicht zurechenbar.

Bei d e t e r m i n i s t i s c h e r M e h r s t e l l e n a r b e i t können Wartezeiten aus folgenden Gründen auftreten:

1. Die einzelnen Stellen sind unterbeschäftigt. Arbeitskräfte können - aus welchen Gründen auch immer - weder anders beschäftigt noch entlassen werden.

2. Die Arbeitskräfteanzahl, die eine gegebene Anzahl von Arbeitsstellen bedienen soll, ist zu groß.
   In Abbildung 9 ist diese Aussage mit Hilfe eines Arbeitsschaubildes veranschaulicht. Zwei Arbeitskräfte bedienen vier Maschinen. Alle 6 ZE fordert eine Maschine Bedienung an. Die Tätigkeitszeit[1)] beträgt 2 ZE je Bedienungsanforderung. Arbeitskraft 1 bedient Maschine 1 und 2; Arbeitskraft 2 bedient Maschine 3 und 4. Wie ersichtlich haben die beiden Arbeitskräfte während der betrachteten Periode eine Gesamtwartezeit von 16 ZE. Die beiden Arbeitskräfte könnten theoretisch 6 Maschinen bedienen.

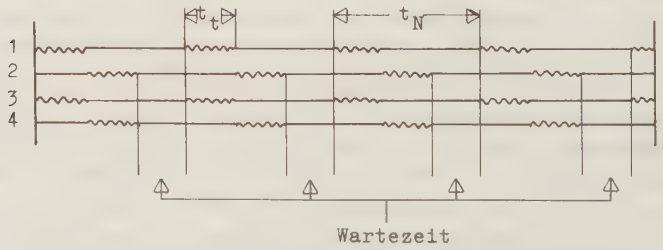


Abb.9: Wartezeiten aufgrund zu hoher Arbeiteranzahlen

1) Die Tätigkeitszeit ist durch eine Wellenlinie dargestellt.

3. Die Ganzzahligkeitsprämisse erfordert immer den Einsatz ganzzahliger Arbeitskräfte- und Stellenanzahlen. Aufgrund der gegebenen Betriebsmittel-Nutzungszeiten und Tätigkeitszeiten können Abstimmdifferenzen auftreten, die ihren Niederschlag in Wartezeiten finden.
Betrachten wir hierzu Abbildung 10.

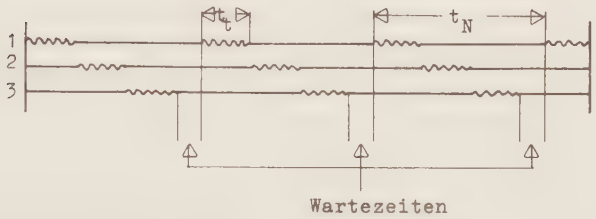


Abb.10: Wartezeiten aufgrund der Ganzzahligkeitsprämisse

Ein Arbeiter bedient drei Arbeitsstellen. Alle 7 ZE wird eine Bedienung an einer Stelle erforderlich. Eine Bedienung währt 2 ZE. Nach jeweils drei Bedienungen entsteht somit 1 ZE Wartezeit für die Arbeitskraft. Theoretisch könnten 3,5 Arbeitsstellen bedient werden, ohne daß Wartezeiten des Arbeiters und Brachzeiten der Arbeitsstellen auftreten. Aufgrund der Ganzzahligkeitsprämisse ist dies jedoch nicht möglich.

Bei s t o c h a s t i s c h e r M e h r s t e l l e n a r b e i t ist die Ermittlung der Wartezeiten, die gegebenenfalls bei der Bedienung eines Maschinenparks durch eine Bedienungsgruppe auftreten, nur mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung möglich. Da bei stochastischer Mehrstellenarbeit Arbeiter-Wartezeiten und Betriebsmittel-Brachzeiten beide innerhalb eines bestimmten Zeitraums auftreten können, muß ihre Bestimmung simultan erfolgen. Allgemein ist lediglich festzustellen, daß Wartezeiten bei stochastischer Mehrstellenarbeit nur mit dem Preis hoher Brachzeiten zu vermeiden sind. Im einzelnen werden wir hierauf im Kapitel 143 eingehen.

142 Die Analyse der Betriebsmittelzeit

Die Betriebsmittel-Ausführungszeit gliedert sich in die Betriebsmittel-Grundzeit und in die Betriebsmittel-Verteilzeit. Letztere ist für den betrachteten Problemkreis nicht relevant. Die Betriebsmittel-Grundzeit läßt sich in Nutzungszeit und Brachzeit zerlegen.

1421 Die Nutzungszeit

Die N u t z u n g s z e i t ist die Zeit, in der das Betriebsmittel oder die Arbeitsstelle für seine Nutzung vorbereitet oder tatsächlich genutzt wird. Dementsprechend gliedert sich die Nutzungszeit wiederum in die sogenannte Lauf-, Wirk- oder Hauptzeit und in die sogenannte Nebenzeit.

Die L a u f - o d e r H a u p t z e i t ist die Zeit, in der das Betriebsmittel oder die Arbeitsstelle für seine eigentliche Aufgabe eingesetzt ist. Während der Hauptzeit wird ein unmittelbarer Fortschritt an den einzelnen Arbeitsgegenständen hervorgerufen. Kennzeichnend für Mehrstellenarbeit sind Hauptzeiten, die weitgehend selbständig ablaufen. Bei deterministischer Mehrstellenarbeit ist die Hauptzeit eine konstante Größe. Bei stochastischer Mehrstellenarbeit dagegen kann die Hauptzeit durch unvorhersehbare Ereignisse zu verschiedenen Zeitpunkten unterbrochen werden, so daß die Hauptzeit eine zufällige Veränderliche darstellt.

N u t z u n g s n e b e n z e i t e n sind solche Zeiten, in denen die Arbeitsstelle oder das Betriebsmittel für seine eigentliche Aufgabe vorbereitet, eingerichtet, eventuell überwacht und kontrolliert wird. Die Nebenzeiten gehören erfahrungsgemäß zum Arbeitsablauf. Hierzu zählen z. B. das Beschicken mit Werkstoffen, das Nachstellen von Einrichtungen, das Einspannen von Werkstücken, das Beheben von Fadenbrüchen u. dgl. Bei deterministischer Mehrstellenarbeit treten die Nebenzeiten in äquidistanten Zeitpunkten auf. Die Nebenzeit ist konstant. Bei stochastischer Mehrstellenarbeit treten die Nebenzeiten in zufälligen Zeitpunkten auf, wie das Beispiel der Fadenbrüche an Webstühlen anschaulich zeigt. Weiterhin kann die Dauer der Nebenzeit zufälligen Schwankungen unterworfen sein.

Können Arbeiten vorgenommen werden, ohne die Produktion an Betriebsmittel oder Arbeitsstelle zu unterbrechen, so fallen die entsprechenden Zeiten unter die Hauptzeit (Verrichtungszeit bei produzierendem Betriebsmittel). Muß dagegen die Produktion unterbrochen wer-

den oder wird gewartet, bis die selbständig ablaufende Hauptzeit zu Ende ist, so wird die anfallende Verrichtungszeit mit dem gleichen Zeitwert als Nebenzeit in die Nutzungszeit des Betriebsmittels übernommen. (Verrichtungszeit bei nicht produzierendem Betriebsmittel = Nebenzeit)

1422 Die Brachzeit

Alle Zeiten, die nicht der Nutzung des Betriebsmittels oder der Arbeitsstelle dienen, werden in der Brachzeit erfaßt. Die REFA-Zeitgliederung unterscheidet "durch Arbeiter bedingte Brachzeit" und "arbeitsablaufbedingte Brachzeit".

Die "durch Arbeiter bedingten Brachzeiten" sind meist Erholungszeiten. Sie sind planbar und werden meist planmäßig in Höhe eines festen Zeitbetrages pro Arbeiter vorgegeben. Auf die Bestimmung optimaler Bedienungssysteme haben sie wegen ihres fixen Charakters keinen Einfluß. Aus diesem Grund seien die durch die Arbeiter bedingten Brachzeiten hier ausgeklammert.

"Arbeitsablaufbedingte Brachzeiten" werden direkt durch die Anzahl der Arbeitskräfte bestimmt, die eine gegebene Anzahl von Arbeitsstellen zu bedienen haben.

Werden an einem Arbeitsplatz heterogene Arbeitsgegenstände hergestellt, so kann die während eines bestimmten Zeitraums auftretende arbeitsablaufbedingte Brachzeit nicht dem einzelnen Arbeitsgegenstand zugerechnet werden.

Bei deterministischer Mehrstellenarbeit können arbeitsablaufbedingte Brachzeiten, die im folgenden kurz als "Brachzeiten" bezeichnet seien, aus folgenden Gründen auftreten.

1. Die einzelnen Arbeitsstellen sind unterbeschäftigt, d. h. die Kapazität des gesamten Arbeitsplatzes oder einer Maschinengruppe ist größer als die gesamte benötigte Nutzungzeit.
2. Die Arbeitskräfteanzahl, die eine gegebene Anzahl von Arbeitsstellen bedienen soll, ist zu gering. Aus diesem Grund müssen die einzelnen Stellen nach abgelaufener Hauptzeit auf Bedienung warten, da die Arbeitskräfte noch an anderen Stellen tätig sind. Vielfach werden diese Zeiten deshalb auch "Stillstandsüberlagerungszeiten"[1], "Überlappungszeiten"[2] oder "Maschineninterferenz-

1) Vgl. GROSS (76), S. 113
2) Vgl. z.B. JONES (94), S. 167; KÖB (109), S. 678; METZGER (137), S. 1204

zeiten"[1] genannt. In der anglo-amerikanischen Literatur spricht man von "interference times".[2]
Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 11 dargestellt.
Eine Arbeitskraft bedient 4 Aggregate. Alle 7 ZE ist eine Bedienung je Aggregat erforderlich. Eine Bedienung erfordert zwei Zeiteinheiten. Da jedoch nur alle 8 ZE alle Aggregate einmal bedient werden können, entstehen pro Zyklus 4 ZE Brachzeit.

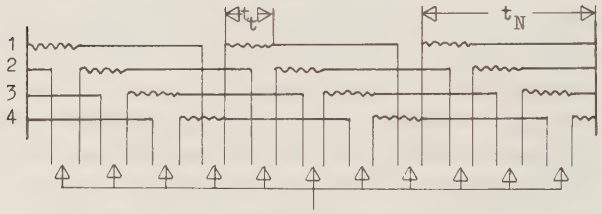


Abb.11: Auftreten von Brachzeiten

3. Eine genaue Abstimmung zwischen Betriebsmittel- und Personalkapazitäten ist aus verschiedenen Gründen nicht immer möglich. Solche Gründe sind z.B. die Ganzzahligkeitsprämisse, sowie verschiedene Nutzungs- und/oder Tätigkeitszeiten innerhalb eines Arbeitsplatzes. Aufgrund dieser nicht gelungenen Harmonisierung können Brachzeiten entstehen. Zur Veranschaulichung kann ebenfalls Abbildung 11 herangezogen werden.

Wegen der Zufälligkeiten des Arbeitsprozesses bei s t o c h a s t i s c h e r M e h r s t e l l e n a r b e i t lassen sich arbeitsablaufbedingte Brachzeiten nur mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung bzw. mit Hilfe der Theorie der stochastischen Prozesse bestimmen. Dabei ist der komplexen Natur dieser Art der Mehrstellenarbeit Rechnung zu tragen. Es kann vorkommen, daß gleichzeitig an mehreren Arbeitsstellen eine Unterbrechung des Arbeitsablaufes auftritt; ist die Bedienungsgruppe im gleichen Zeitpunkt mit Arbeiten an anderen

1) Vgl. z. B. EILON (45), S. 152
2) Vgl. z. B. FIELD (54), S. 288

Stellen beschäftigt, so kommt es zu Brachzeiten. Da theoretisch innerhalb eines Arbeitsplatzes an allen Arbeitsstellen gleichzeitig eine Unterbrechung des Arbeitsablaufes auftreten kann, wären Brachzeiten nur dann zu vermeiden, wenn jeder Arbeitsstelle eine Arbeitskraft zugeteilt würde. Hohe Wartezeiten des Arbeitspersonals wären jedoch dann in der Regel nicht zu vermeiden, da der gleichzeitige Stillstand aller Aggregate nur mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit eintreten dürfte. Infolgedessen gilt es insbesondere bei stochastischer Mehrstellenarbeit, einen sinnvollen Ausgleich zwischen Warte- und Brachzeiten zu finden.

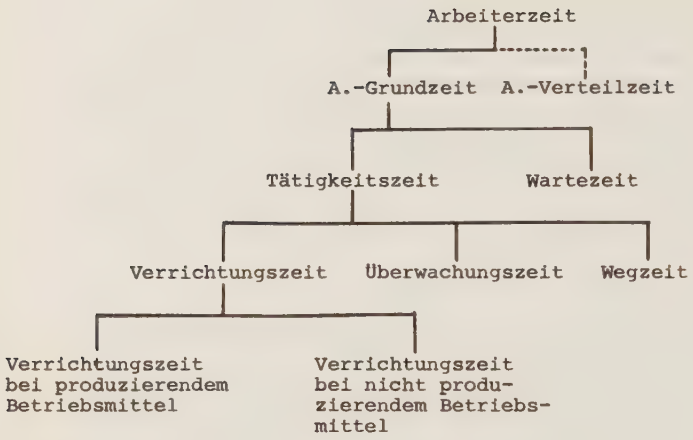
143 Die Beziehungen zwischen Arbeiter- und Betriebsmittelzeiten

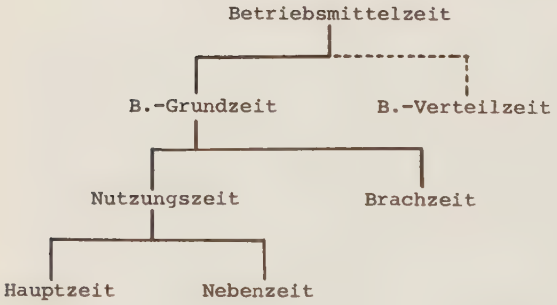
Bevor einige grundlegende Beziehungen zwischen Arbeiter- und Betriebsmittelzeiten aufgezeigt werden, seien die einzelnen Zeitkategorien für den Arbeiter bzw. für das Betriebsmittel in Übersicht 2 nochmals zusammengefaßt.

Aus unseren Ausführungen ergibt sich folgendes Berechnungsschema für die Arbeiter- und Betriebsmittelzeit[1].

Z e i t k a t e g o r i e n	Arbeiter	Betriebsmittel
Maschinenlauf-, Hauptzeit	-	T_h (t_h)
Verrichtungszeit bei Maschinenlauf	T_{kh} (t_{kh})	-
Verrichtungszeit bei Maschinenstillstand =	T_{kn} (t_{kn})	-
Nebenzeit	-	T_n (t_n)
Überwachungszeit	$T_ü$ ($t_ü$)	-
Wegzeit (Mittelwert)	T_l (t_l)	-
Zw.Su.: Tätigkeitszeit;Nutzungszeit	T_t (t_t)	T_N (t_N)
Wartezeit	T_w	-
Brachzeit	-	T_{Ba}
Zw.Su.: Grundzeit	T_g	T_{Mg}
Verteilzeit	T_v	T_{Mv}
Su.: Arbeiterzeit; Betriebsmittelzeit	T_A	T_M

1) Vgl. WINKEL (218), S. 24 f.





Übersicht 2: Die Gliederung der Arbeiter- und Betriebsmittelzeit

Werden auf dem gesamten Arbeitsplatz h o m o g e n e Arbeitsgegenstände gefertigt, so läßt sich das gleiche Schema für die Stückzeiten[1] a u f s t e l l e n. Bei h e t e r o g e n e n Arbeitsaufträgen ist dies nicht möglich, zumindest nicht für die Wegzeit, Warte- und Brachzeit, da diese dem einzelnen Auftrag nicht verursachungsgemäß zugerechnet werden kann.

1431 Die Beziehungen zwischen Brach- und Wartezeiten bei deterministischer Mehrstellenarbeit[2]

1. Um die Beziehungen zwischen Warte- und Brachzeiten bei deterministischer Mehrstellenarbeit für die in Übersicht 1 dargestellten Grundformen aufzuzeigen, ist es zweckmäßig, den Begriff des Arbeitstaktes und des Zyklus am mehrstelligen Arbeitsplatz einzuführen.

Unter der Dauer eines A r b e i t s t a k t e s t_{AT} verstehen wir die (mittlere) Zeitspanne vom Auftreten bis zur Wiederkehr der Bedienung e i n e r A r b e i t s s t e l l e. Bei Bedienung einer Arbeitsstelle entspricht diese Zeit der Nutzungszeit pro Arbeitsgegenstand t_N an der entsprechenden Stelle. (Abb. 12) Bei Mehrstellenarbeit kann die Arbeitstaktzeit auch Brachzeiten enthalten. (Abb. 16)

Unter der Dauer eines Z y k l u s t_Z versteht man die Zeitspanne, die zwischen dem Auftreten und der Wiederkehr ein und desselben Arbeitsvorganges an e i n e m A r b e i t s p l a t z liegt. (Abb.13)

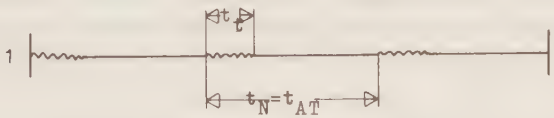


Abb.12: Arbeitstakt bei Bedienung einer Arbeitsstelle

1) Durch Kleinbuchstaben gekennzeichnet.

2) Um eine Analyse der Beziehungen zwischen Warte- und Brachzeiten bei deterministischer Mehrstellenarbeit hat sich insbesondere DAMS (37), S. 21-28, bemüht. Seiner ausgezeichneten Analyse ist nur wenig hinzuzufügen. Dieses Kapitel entstand deshalb in enger Anlehnung an W. Dams.

Wie Abbildung 13 zeigt, müssen Arbeitstakt und Zykluszeit nicht notwendig zwei verschiedene Zeitwerte aufweisen.

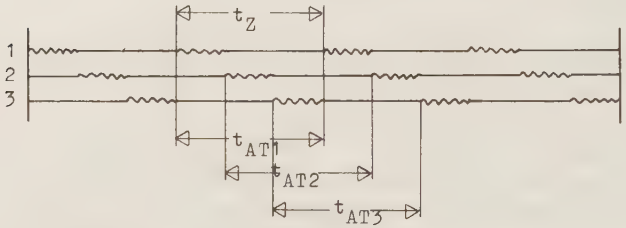


Abb.13: Zyklus bei Bedienung mehrerer Arbeitsstellen

Die in Übersicht 1 genannten Grundformen der Mehrstellenarbeit lassen sich im wesentlichen auf folgende beiden Fälle zurückführen:

- Mehrstellenarbeit mit gleichem Arbeitstakt an allen Arbeitsstellen
- Mehrstellenarbeit mit verschiedenen Arbeitstakten an den Arbeitsstellen.

Der erste Fall tritt praktisch nur dann auf, wenn homogene Arbeitsgegenstände auf homogenen Betriebsmitteln hergestellt werden.(Grundform 1 und Grundform 3) Alle anderen in Übersicht 1 aufgeführten Grundformen führen im Regelfall zu verschiedenen Arbeitstakten. Das Auftreten gleicher Arbeitstakte ist bei ihnen als zufälliges Ergebnis anzusehen.

Bei der folgenden Analyse sei davon ausgegangen, daß einem Arbeitsplatz, der aus mehreren Arbeitsstellen besteht, ein Bedienungsarbeiter zugewiesen wird. Für die graphischen Darstellungen sei zusätzlich unterstellt, daß dieser eine Arbeiter genau drei Arbeitsstellen bedient.

2. Betrachten wir zunächst den Fall der Mehrstellenarbeit m i t g l e i c h e m A r b e i t s t a k t an allen Arbeitsstellen.

Bei gleichem Arbeitstakt an allen Arbeitsstellen lassen sich für die Berechnung der Zyklusdauer zwei Fälle unterscheiden:

(1.26 a) $$t_Z = \sum_{s=1}^{M} t_{ts}$$

(1.26 b) $$t_Z = t_{Ns}\ (max)$$

Die Zykluszeit ist entweder gleich der Summe aller Tätigkeitszeiten für die verschiedenen Produkte an den einzelnen Arbeitsstellen oder sie ist gleich dem Maximalwert aller Nutzungszeiten der Produkte an den einzelnen Arbeitsstellen s = 1, ..., M. Der jeweilige Höchstwert der beiden Berechnungsformen a) und b) ist die Zykluszeit.

Je nachdem, welche Berechnung zu dem höchsten Wert für t_Z führt, läßt sich folgende Klassifizierung vornehmen:

- Kein Auftreten von Brach- und Wartezeiten
- Positive Wartezeiten, keine Brachzeiten
- Positive Brachzeiten, keine Wartezeiten
- Positive Brach- und Wartezeiten.

21. Kein Auftreten von Brach- und Wartezeiten

Dieser Fall kann nur eintreten, wenn gilt

(1.27) $$t_Z = \sum_{s=1}^{M} t_{ts} = t_{N1} = t_{N2} = \ldots = t_{NM}$$

d.h. alle Nutzungszeiten der verschiedenen Produkte an den einzelnen Arbeitsstellen haben die gleiche Dauer und sind gleich der Summe der Tätigkeitszeiten während der Zykluszeit. (Abb. 14)

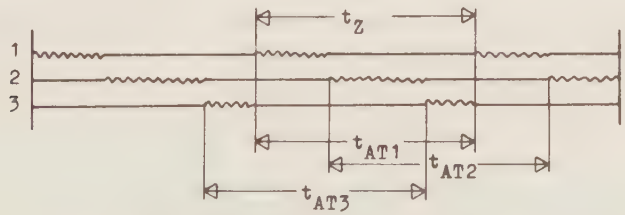


Abb.14: Mehrstellenarbeit mit gleichem Arbeitstakt an allen Stellen; keine Brach- und Wartezeiten

22. Positive Wartezeiten, keine Brachzeiten

Dieser Fall tritt unter folgender Bedingung ein:

$$(1.28) \qquad t_Z = t_{N1} = t_{N2} = \dots = t_{NM} > \sum_{s=1}^{M} t_{ts}$$

d.h. alle Nutzungszeiten weisen die gleiche Zeitdauer auf, jedoch ist diese größer als die Summe aller Tätigkeitszeiten. (Abb. 15)

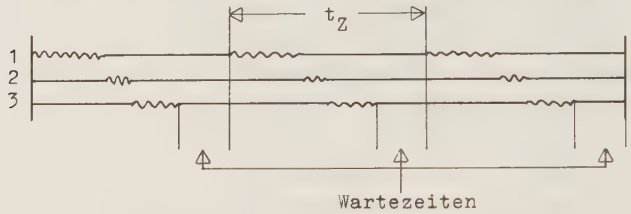


Abb.15: Mehrstellenarbeit mit gleichem Arbeitstakt an allen Stellen; positive Wartezeiten

23. Positive Brachzeiten, keine Wartezeiten

Dieser Fall tritt dann ein, wenn eine der folgenden Bedingungen vorliegt:

$$(1.29.1) \qquad t_Z = \sum_{s=1}^{M} t_{ts} > t_{N1} = t_{N2} = \dots = t_{NM}$$

d.h. alle Nutzungszeiten sind gleich, jedoch ist ihre Dauer kleiner als die Summe aller Tätigkeitszeiten. (Abb. 16)

$$(1.29.2) \qquad t_Z = \sum_{s=1}^{M} t_{ts} \geqslant t_{Ns}\ (max)$$

und $t_{Ns}(max) > t_{Ns}$ für mindestens eins,

d.h. die größte Nutzungszeit am Arbeitsplatz ist kleiner gleich der Summe der Tätigkeitszeiten.

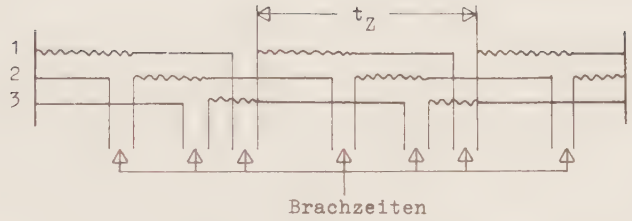


Abb.16: Mehrstellenarbeit mit gleichem Arbeitstakt an allen Stellen; positive Brachzeiten

24. Positive Brach- und Wartezeiten

Dieser Fall kann auftreten für Bedingung (1.30)

$$(1.30) \qquad t_Z = t_{Ns}\ (max) > \sum_{s=1}^{M} t_{ts}$$

d.h. der Höchstwert unter allen Nutzungszeiten ist größer als die Summe aller Tätigkeitszeiten. (Abb. 17)

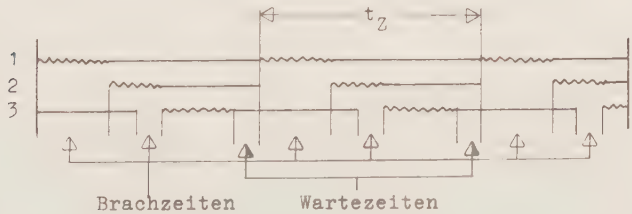


Abb.17: Mehrstellenarbeit mit gleichem Arbeitstakt an allen Stellen; positive Brach- und Wartezeiten

Aus den Abbildungen 14 bis 17 geht hervor, daß bei gleichen Arbeitstakten an allen Arbeitsstellen die Dauer jedes Arbeitstaktes mit der Zykluszeit übereinstimmt.

$$t_{AT} = t_Z$$

Die Reihenfolge der Bedienung der einzelnen Arbeitsstellen bleibt immer die gleiche. Eine Änderung der Reihenfolge hat jedoch keinen Einfluß auf die Zeitgrößen. Der Fall der Mehrstellenarbeit mit gleichen Arbeitstakten bietet die besten Voraussetzungen für eine Turnusbedienung.

3. Es soll nun der Fall der Mehrstellenarbeit m i t u n t e r s c h i e d l i c h e n A r b e i t s t a k t e n an den einzelnen Stellen analysiert werden.

Zur Erörterung dieser bereits sehr komplizierten Zusammenhänge empfiehlt es sich, folgende Unterfälle zu unterscheiden:

- Die Zykluszeit entspricht dem längsten Arbeitstakt und ist durch jeden Arbeitstakt ganzzahlig teilbar.
- Die Zykluszeit entspricht einem ganzzahligen Vielfachen des längsten (durchschnittlichen) Arbeitstaktes und ist durch alle Arbeitstakte ganzzahlig teilbar.
- Es existiert kein Zyklus, der durch jeden Arbeitstakt ganzzahlig teilbar ist.

31. Entspricht die Zykluszeit dem längsten Arbeitstakt und ist sie durch alle Arbeitstakte ganzzahlig teilbar, so gilt:

(1.31 a) $$t_Z \geqslant t_{Ns}(max)$$

bzw.

(1.31 b) $$t_Z = t_{ATs}(max)$$

Aus (1.31) wird ersichtlich, daß sich die Zykluszeit unter dieser Bedingung formelmäßig nicht als eindeutiger Wert ermitteln läßt, da der längste Arbeitstakt Brachzeiten enthalten kann. Die Ermittlung der Zykluszeit kann somit nur auf graphischem Wege (Arbeitsablaufdiagramm) erfolgen.[1)]

1) Eine Ermittlung der Zykluszeit ist mit dem im 4. Kapitel dargestellten Modell ebenfalls möglich. An dieser Stelle soll jedoch nicht darauf eingegangen werden.

Auch bei dieser Art der Mehrstellenarbeit können folgende Fälle unterschieden werden:

- Kein Auftreten von Brach- und Wartezeiten
- Positive Wartezeiten, keine Brachzeiten
- Positive Brachzeiten, keine Wartezeiten
- Positive Brach- und Wartezeiten.

a) Kein Auftreten von Brach- und Wartezeiten (Abb. 18)

Hier gelten folgende Zusammenhänge:

(1.32) $$\frac{t_Z}{t_{Ns}} = h_s := \text{ganzzahlig!} \qquad (s = 1, \ldots, M)$$

(1.33) $$t_Z = \sum_{s=1}^{M} t_{ts} \cdot h_s$$

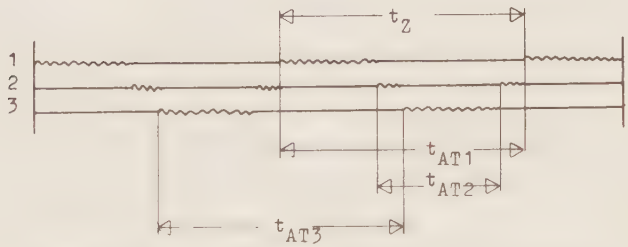


Abb.18: Mehrstellenarbeit mit verschiedenen Arbeitstakten an den einzelnen Stellen; keine Brach- und Wartezeiten

b) Positive Wartezeiten, keine Brachzeiten (Abb. 19)

Dieser Fall tritt ein, wenn gilt:

(1.32) $$\frac{t_Z}{t_{Ns}} = h_s := \text{ganzzahlig!} \qquad (s = 1, \ldots, M)$$

(1.34) $$t_Z > \sum_{s=1}^{M} t_{ts} \cdot h_s$$

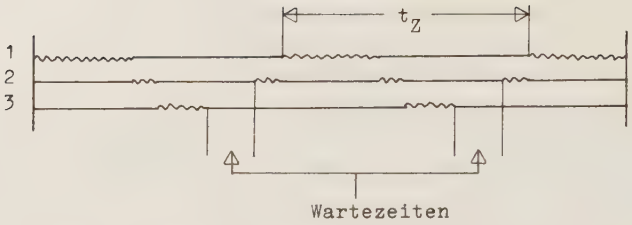


Abb.19: Mehrstellenarbeit mit verschiedenen Arbeitstakten an den einzelnen Stellen; positive Wartezeiten

c) Positive Brachzeiten, keine Wartezeiten (Abb.20)

Dieser Fall tritt unter folgenden Bedingungen ein:

(1.35) $$\frac{t_Z}{t_{ATs}} = h_s := \text{ganzzahlig!} \qquad (s = 1, \ldots, M)$$

mit $$t_{ATs} > t_{Ns}(max)$$

(1.36) $$t_Z = \sum_{s=1}^{M} t_{ts} \cdot h_s$$

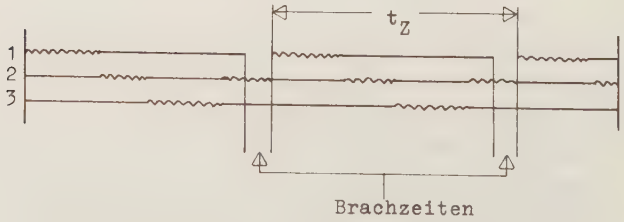


Abb.20: Mehrstellenarbeit mit verschiedenen Arbeitstakten an den einzelnen Stellen; positive Brachzeiten

d) Positive Brach- und Wartezeiten (Abb. 21)
Dieser Fall kann unter den Bedingungen (1.35) und (1.34) eintreten.

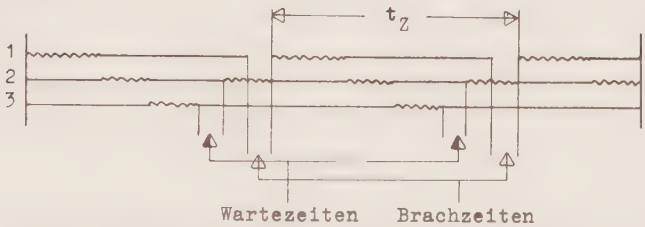


Abb.21: Mehrstellenarbeit mit verschiedenen Arbeitstakten an den einzelnen Stellen; positive Brach- und Wartezeiten

Die Bedienungsfolge der einzelnen Arbeitsstellen ist, wie die Abbildungen 18 bis 21 zeigen, während der Zykluszeit unterschiedlich, wiederholt sich jedoch von Zyklus zu Zyklus.

32. Entspricht die Zykluszeit einem ganzzahligen Vielfachen des längsten (durchschnittlichen) Arbeitstaktes und ist sie durch alle Arbeitstakte ganzzahlig teilbar, so gilt:

(1.37 a) $t_Z \geqslant h_s \cdot t_{Ns}(max)$ $\qquad h_s$: = ganzzahlig!

bzw.

(1.37 b) $t_Z = h_s \cdot \bar{t}_{ATs}(max)$ $\qquad h_s$: = ganzzahlig!

mit $\bar{t}_{ATs}(max) > t_{Ns}(max)$

Auch hier ist ersichtlich, daß sich die Zykluszeit formelmäßig nicht als eindeutiger Wert ermitteln läßt. Die Gleichung (1.37 b) ist in vielen Fällen auch nur für durchschnittliche Arbeitstakte erfüllt, da Brachzeiten aperiodisch auftreten können. (Abb. 23) Die Zykluszeit ist somit nur mit Hilfe graphischer Methoden (Arbeitsablaufdiagramm) berechenbar[1)]. Bei dieser Form der Mehrstellenarbeit lassen sich Wartezeiten bzw. Brach- und Wartezeiten nicht vermeiden.

1) Vgl. Anm. 1 auf S. 41

a) Positive Wartezeiten, keine Brachzeiten (Abb. 22)

Dieser Fall tritt ein, wenn folgende Zusammenhänge gelten:

(1.38) $$\frac{t_Z}{t_{Ns}} = h_s := \text{ganzzahlig!} \qquad (s = 1,\ldots, M)$$

mit $$t_Z = \sum_{s=1}^{M} t_{Ns} \cdot h_s$$

(1.39) $$t_Z > \sum_{s=1}^{M} t_{ts} \cdot h_s$$

(1.38) besagt, daß die Zykluszeit durch alle Nutzungszeiten ganzzahlig teilbar sein muß. Überdies muß die Summe aller Tätigkeitszeiten während der Zykluszeit kleiner als diese sein (1.39).

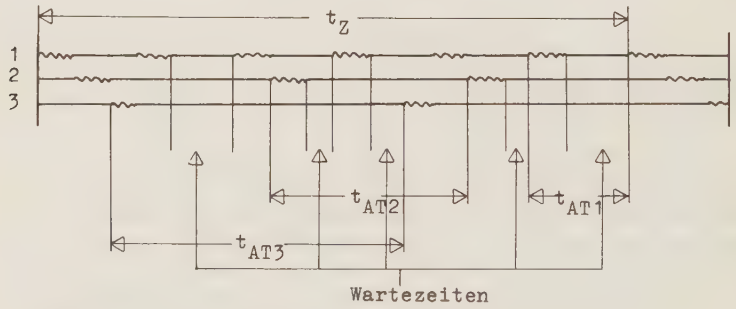


Abb.22: Mehrstellenarbeit mit verschiedenen Arbeitstakten an den einzelnen Stellen; positive Wartezeiten

b) Positive Brach- und Wartezeiten (Abb. 23)

Hier gilt:

(1.40) $$\frac{t_Z}{t_{ATs}} = h_s := \text{ganzzahlig!} \qquad (s = 1,\ldots, M)$$

(1.41) $$t_Z > \sum_{s=1}^{M} t_{ts} \cdot h_s$$

Zum besseren Verständnis dieses Falles haben wir die der Abbildung

23 zugrundeliegenden Zahlenwerte in Tabelle 6 zusammengefaßt.

Arbeitsstelle	Häufigkeit des Arbeitstaktes pro Zyklus	(Mittlerer) Arbeitstakt (AT) [Min]	Tätigkeitszeit pro AT [Min]	Betriebsmittel-Laufzeit pro AT [Min]	Brachzeit pro Zyklus [Min]
1	5	5	1	4	-
2	3	8,33	1	7	1
3	2	12,5	1	11	1

Tabelle 6: Zahlenwerte zu Abbildung 23

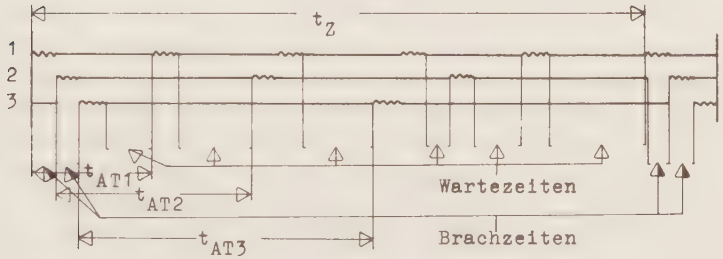


Abb.23: Mehrstellenarbeit mit verschiedenen Arbeitstakten an den einzelnen Stellen; positive Brach- und Wartezeiten

Die Bedienungsfolge der einzelnen Arbeitsstellen ist innerhalb der Zykluszeit sehr unterschiedlich. Die Reihenfolge der Bedienungen wiederholt sich entsprechend den Häufigkeiten des Zyklus.

33. Es existiert kein Zyklus, der durch jeden Arbeitstakt ganzzahlig teilbar ist.
Dieser Fall entzieht sich einer formelmäßigen Analyse. Die Reihenfolge der Bedienungen der einzelnen Arbeitsstellen ist während einer Periode völlig regellos. Die Dauer der Brach- und Wartezeiten wird in der Praxis auf graphischem Wege ermittelt. Bei dieser Methode wird die Reihenfolge der Bedienung durch ein unsystematisches Probierverfahren ermittelt, d. h. jede Arbeitsstelle hat die gleiche Wahrscheinlichkeit als erste in den Bedienungsplan eingesetzt zu werden. Insofern kann man sagen, daß die Planung der Bedienungsfolge zufallsgesteuert ist. Im 4. Kapitel werden wir ein Modell dar-

stellen, mit dessen Hilfe der Arbeitsablauf auch dieses komplizierten Falles exakt geplant werden kann.

4. Die bei deterministischer Mehrstellenarbeit auftretenden Brach- und Wartezeiten können hinsichtlich ihres Auftretens wie folgt unterschieden werden.

- Brach- und/oder Wartezeiten in jedem Zyklus
- Brach- und Wartezeiten am Beginn und Ende der Bearbeitungsdauer eines Arbeitsauftrages, sowie am Beginn und Ende der Schichtzeit.

41. Brach- und/oder Wartezeiten in jedem Zyklus

a) Brach- und Wartezeiten innerhalb der Zykluszeit treten dann nicht auf, wenn die Beendigung der Bedienung einer Arbeitsstelle (eingeschlossen die Wegzeit zur nächsten Arbeitsstelle) mit dem Ende der Laufzeit der nächsten zu bedienenden Stelle zusammenfällt.

b) Wartezeiten entstehen dann, wenn die Bedienung einer Arbeitsstelle und der Gang zur nächsten zu bedienenden Stelle ausgeführt sind, bevor diese Stelle Bedienung erfordert. Die Berechnung der Wartezeit erfolgt
bei gleichem Arbeitstakt an allen Arbeitsstellen nach

$$t_{wZ} = t_Z - \sum_{s=1}^{M} t_{ts} \quad , \tag{1.42}$$

bei verschiedenen Arbeitstakten an den Arbeitsstellen nach

$$t_{wZ} = t_Z - \sum_{s=1}^{M} t_{ts} \cdot h_s \tag{1.43}$$

c) Brachzeiten treten auf, wenn die Laufzeit einer Arbeitsstelle beendet ist, bevor ein Arbeiter verfügbar ist, d. h. bevor er seine Tätigkeit an der zuletzt bedienten Stelle beendet und/oder den Gang zur zu bedienenden Stelle ausgeführt hat. Für die Berechnung der Brachzeiten gilt
bei gleichem Arbeitstakt an allen Arbeitsstellen für jede einzelne Stelle s=1,... , M

$$t_{BaZs} = t_Z - t_{Ns} \tag{1.44}$$

und für den Arbeitsplatz:

(1.45) $$t_{BaZ} = M \cdot t_Z - \sum_{s=1}^{M} t_{Ns}$$

bei verschiedenen Arbeitstakten an den Arbeitsstellen für jede einzelne Stelle s = 1, ..., M

(1.46) $$t_{BaZs} = t_Z - t_{Ns} \cdot h_s$$

und für den Arbeitsplatz:

(1.47) $$t_{BaZ} = M \cdot t_Z - \sum_{s=1}^{M} t_{Ns} \cdot h_s$$

d) Brach- und Wartezeiten innerhalb eines Zyklus entstehen, wenn Bedienung einer Stelle und Gang zur nächsten Stelle erfolgt sind, bevor die nächste zu bedienende Stelle Bedienung erfordert, und die Laufzeit einer anderen Stelle endet, bevor der Arbeiter seine Tätigkeit an der zuvor zu bedienenden Stelle einschließlich des Gangs zur nächsten Stelle durchgeführt hat. Bei diesem Fall können die Brach- und Wartezeiten getrennt nach den Formeln (1.42) bis (1.47) ermittelt werden.

42. Brach- und Wartezeiten am Beginn und Ende der Bearbeitungsdauer eines Arbeitsauftrages, sowie am Beginn und Ende der Schichtzeit.

Brach- und Wartezeiten können zu Beginn und am Ende der Bearbeitungsdauer eines Arbeitsauftrages deshalb anfallen, weil die Arbeitsstellen meist nacheinander in Betrieb gesetzt werden und weil sie am Ende der Bearbeitungszeit auch wieder nacheinander auslaufen. (Abb. 24)

Die Gesamtheit dieser Brach- und Wartezeiten hat an der gesamten Bearbeitungsdauer meist nur einen sehr geringen Anteil. Berücksichtigt man zudem die Tatsache, daß die zu Anfang der Bearbeitungsdauer anfallenden Brachzeiten keine Kosten (z. B. Energieverbrauch) verursachen und daß die zu Ende der Bearbeitungsdauer entstehenden Wartezeiten mit Aufräumarbeiten u. dgl. ausgefüllt werden können, so erscheint es erlaubt, auf eine Ermittlung und Berücksichtigung dieser Zeiten zu verzichten.[1)]

1) Berechnungsgrundlagen für diese Brach- und Wartezeiten findet man bei DAMS (37), S. 31-36. In dem im 4. Kapitel dargestellten Modell werden jedoch auch diese Brach- und Wartezeiten berücksichtigt.

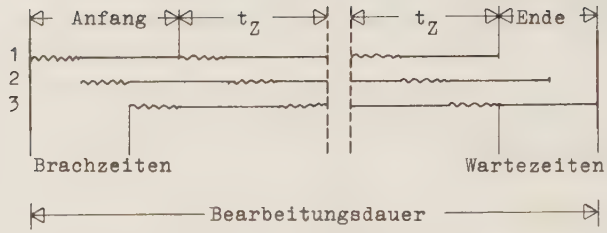


Abb.24: Brach- und Wartezeiten am Anfang und am Ende der Bearbeitungsdauer

Ist die Bearbeitungsdauer eines Arbeitsauftrages größer als die Schichtzeit und wird die Arbeit bei Schichtwechsel unterbrochen, so treten zu Anfang und Ende der Schichtzeit die gleichen Brach- und Wartezeiten wie bei der Bearbeitungsdauer auf. Diese Leerzeiten lassen sich vermeiden, wenn der Schichtwechsel ohne Arbeitsunterbrechung durchgeführt wird.

5. Im produktionstheoretischen Sinne stellt die Bedienung mehrerer Arbeitsstellen eine Kombination der Produktionsfaktoren "menschliche Arbeit" und "Betriebsmittel" dar[1]. Da zur Erstellung eines bestimmten Arbeitsgegenstandes eine genau festgelegte Einsatzmenge - gemessen in Zeiteinheiten - erforderlich ist, handelt es sich hier um limitationale Produktionsfaktoren[2]. Die Erstellung einer bestimmten Erzeugnismenge erfordert also den Einsatz einer technisch fixierten Produktionsfaktormenge. Darüber hinausgehende Faktormengen werden vom Produktionsprozeß nicht aufgenommen.

1) Vgl. auch GIESEN (70), S. 423

2) Vgl. hierzu KILGER (102), S. 12; SCHNEIDER (178), S. 164 ff.

Bezüglich der Mehrstellenarbeit bedeutet dies:

- Ist die herzustellende Menge von Arbeitsgegenständen fest vorgegeben und ist die zur Verfügung stehende Betriebsmittel- und Personalkapazität größer als die für diese Menge erforderliche Kapazität, so entstehen Warte- und Brachzeiten als überschüssige Faktormengen.
- Ist die herzustellende Menge von Arbeitsgegenständen nicht fixiert, so kann theoretisch die Produktion so weit ausgedehnt werden, bis eine der beiden zur Verfügung stehenden Kapazitäten zum Engpaß wird.

Für den Fall, daß der gesamte Arbeitsplatz aus homogenen Betriebsmitteln besteht und jede Stelle mit gleichen Arbeitsgegenständen belegt ist, kann der Verlauf der Brach- und Wartezeiten (einschließlich der am Anfang und am Ende der gesamten Arbeitszeit anfallenden Leerzeiten) für einen gegebenen Maschinenpark bei Variation der Arbeitskräfteanzahl dargestellt werden (Abb. 25).

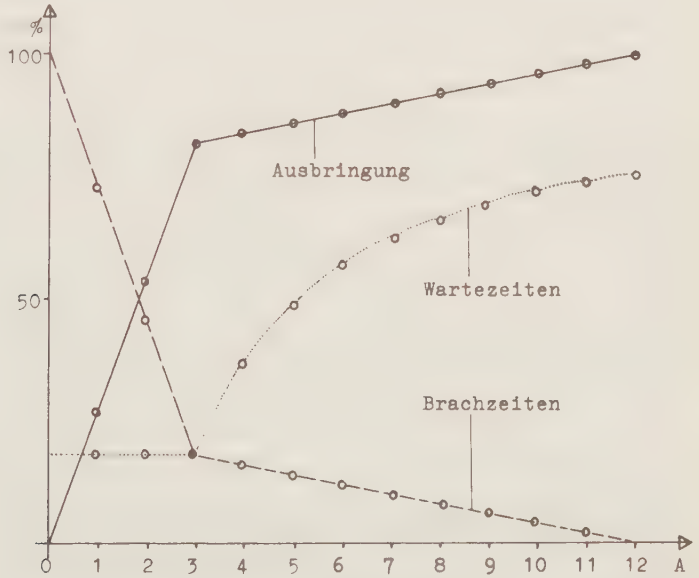


Abb.25: Verlauf von Brach- und Wartezeiten, sowie Ausbringung in Abhängigkeit der Arbeitskräfteanzahl

Der Abbildung 25 liegen folgende Daten zugrunde: Der Arbeitsplatz besteht aus 12 homogenen Maschinen. Auf allen Maschinen wird das gleiche Erzeugnis hergestellt. Zur Herstellung eines Erzeugnisses wird die Maschinenkapazität mit 8 ZE beansprucht. Hierin sind 2 ZE Bedienungszeit enthalten. Zur Erstellung einer Einheit ist eine Bedienung erforderlich. Die Arbeitszeit pro Maschine, sowie für einen Arbeiter beträgt 32 ZE. - Korrekterweise hätten die Kurven in Abb. 25 - aufgrund einer nur ganzzahlig möglichen Variation der Arbeitskräfte - stufenförmig dargestellt werden müssen. Aus Gründen der Anschaulichkeit wurde jedoch darauf verzichtet.

Aus den Prämissen folgt, daß Mehrstellenarbeit mit gleichem Arbeitstakt an allen Stellen vorliegt. Wird der Arbeitsplatz mit 3 Arbeitskräften besetzt, so entstehen während der Zykluszeit weder Brach- noch Wartezeiten[1]. Aus diesem Grund weisen alle drei Kurven bei $A = 3$ einen Knick auf. Ist die $A < 3$ so entstehen nur Wartezeiten am Ende der Arbeitszeit, wenn die Maschinen auslaufen. Der Anteil dieser Wartezeiten an der Gesamtarbeitszeit aller Arbeiter muß für jede beliebige Arbeitskräfteanzahl konstant sein. Dagegen entstehen im Bereich $0 \leqslant A < 3$ während der Zykluszeit Brachzeiten, die mit wachsender Arbeitskräfteanzahl bis zum Abszissenwert $A = 3$ abnehmen. Für den Bereich $3 \leqslant A < 12$ entstehen lediglich Brachzeiten zu Beginn der Arbeitszeit, da die Maschinen nur nacheinander in Gang gesetzt werden können. Erst wenn $A = 12$, entfallen auch diese Brachzeiten. Im Bereich $3 < A \leqslant 12$ entstehen jedoch Wartezeiten innerhalb des Zyklus, die mit wachsender Arbeitskräfteanzahl linear ansteigen. Der degressive Verlauf der Wartezeiten in Abbildung 25 kommt deshalb zustande, weil die Wartezeiten innerhalb des Zyklus erst ab $A > 3$ positiv werden. Die Bezugsgrundlage (gesamte Arbeitszeit aller Arbeitskräfte) ist jedoch eine Gerade mit positivem Steigungsmaß, die durch den Nullpunkt geht. Entsprechend der Brachzeitkurve verläuft die Kurve der Ausbringung bzw. die Kurve der Nutzungszeit[2].

---

1) Dies kann wie folgt gezeigt werden: Die Nutzungszeit/Stück beträgt an jeder Maschine 8 ZE. Da die Bedienungszeit 2 ZE erfordert, kann ein Arbeiter 8/2 = 4 Maschinen bedienen. Zur Bedienung des gesamten Maschinenparks sind somit 12/4 = 3 Arbeiter erforderlich. Die Zyklusdauer beträgt 8 ZE (Vgl. Formel (1.27)); innerhalb der Zykluszeit treten keine Brach- und Wartezeiten auf (Vgl. Formel (1.44) und (1.42)).

2) Die Ausbringung kann statt in der Dimension "Stück" o.ä. auch in "(Nutzungs-)Zeiteinheiten" gemessen werden. Da "Gesamtzeit = Nutzungszeit + Brachzeit", ergibt sich der Ausbringungsverlauf leicht durch: 100 (%) abzüglich prozentualer Brachzeitanteil.

1432 Die Beziehungen zwischen Brach- und Wartezeiten bei stochastischer Mehrstellenarbeit

1. Besondere Schwierigkeiten bereitet die Bestimmung von Brach- und Wartezeiten bei stochastischer Mehrstellenarbeit. Dies liegt wohl darin begründet, daß die Gesetzmäßigkeiten, unter denen zufällige Stillstände von Arbeitsstellen auftreten, nicht richtig erkannt werden.

In der Literatur wird eine Fülle e x p e r i m e n t e l l e r V e r f a h r e n beschrieben, wie und auf welche Weise Brachzeiten bestimmt werden sollten[1]. Besonders hat sich hier E. WEDEKIND um die Erforschung der Mehrstellenarbeit bemüht[2]. Zu all diesen experimentell begründeten Verfahren ist jedoch kritisch zu bemerken, daß sie der Natur der stochastischen Mehrstellenarbeit ungenügend Rechnung tragen. Sie sind aus methodischen Gründen abzulehnen, da zur Berechnung von Brach- und Wartezeiten bei stochastischer Mehrstellenarbeit allein m a t h e m a t i s c h b e g r ü n d e t e V e r f a h r e n geeignet sind. Dies wurde auch relativ früh von einer Reihe von Autoren erkannt[3].

Mit Hilfe der Theorie der stochastischen Prozesse, speziell mit Hilfe der Warteschlangentheorie, konnten die bei stochastischer Mehrstellenarbeit auftretenden Probleme einer Lösung näher gebracht werden. Die mathematischen Schwierigkeiten einer analytischen Durchdringung komplizierterer Formen stochastischer Mehrstellenarbeit sind jedoch sehr groß.

---

1) Vgl. GAUTZSCH (66), S. 179-182 und (67), S. 173-176; KAESEWURM (96), S. 43-47; LANGHEINRICH (118), S. 27-31; PRACHTL (161), S. 261; TIMME (192), S. 138-141 und (193), S. 5-6; WALZ (201), S. 11-14 und (202), S. 27-28

2) WEDEKIND (203), S. 6-12, (205) und (206), S. 1238-1241

3) Vgl. BERNSTEIN (19), S. 85, S. 156, S. 158, S. 160, S. 162, S. 164; BIHLER (22); GROSS (76); JONES (92), S. 118-121 und (94); JONES (95), S. 123-124; NEUMANN (146), S. 267-270 und (147), S. 1131-1132; OPL (149); RIES (163), S. 26 ff.; VILLERS (198), S. 45 ff.; nach WINKEL (218), S. 28 und Anhang 3, S. 83-85, hat sich auch SCHAUDT, G.F. (Die Überlappungszeit, ihre Ermittlung mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Bedeutung innerhalb der Mehrstellenformel. Unveröffentlichte Ingenieurarbeit, Krefeld 1958) mit der Brachzeitermittlung bei stochastischer Mehrstellenarbeit befaßt.

In der Praxis wird bei der Bestimmung optimaler Bedienungssysteme bei stochastischer Mehrstellenarbeit im allgemeinen ein mehr oder weniger systematisches Probierverfahren angewandt, bei dem versucht wird, einen vertretbaren Ausgleich zwischen Brach- und Wartezeiten zu finden. Bessere Planungsergebnisse werden zweifellos mit den Verfahren der Simulationstechnik erzielt[1]. Diese erfordern jedoch den Einsatz von elektronischen Rechenanlagen. Der Anwendbarkeit der Simulationstechnik sind allerdings dadurch Grenzen gesetzt. (Verfügbarkeit einer Anlage, lange Rechenzeiten, hohe Kostensätze pro Stunde Rechenzeit, Programmieraufwand). Die Bestimmung optimaler Bedienungssysteme bei stochastischer Mehrstellenarbeit mit Hilfe von analytischen Modellen ist somit nicht nur ein kompliziertes theoretisches Problem, sondern auch von praktischem Interesse.

2. Mit Hilfe eines einfachen Modells soll die Interdependenz von Brach- und Wartezeiten aufgezeigt werden[2]. Um die Gesetzmäßigkeiten, denen Brach- und Wartezeiten bei stochastischer Mehrstellenarbeit gehorchen, herauszufinden, sei vorausgesetzt, daß auf allen, von einer Gruppe von Arbeitskräften, bedienten Arbeitsstellen homogene Güter hergestellt werden und, daß der Arbeitsplatz aus homogenen Arbeitsstellen besteht.

Die Bedienungszeit pro Arbeitsstelle sei mit t bezeichnet. Während der Bedienzeit produziert die Stelle nicht; sie steht still.

p — sei die Wahrscheinlichkeit dafür, daß innerhalb der Periode t eine Arbeitsstelle ausfällt und bedient werden muß. Für das Ausfallen der Arbeitsstellen wird stochastische Unabhängigkeit angenommen[3].

q = 1-p — ist also die Wahrscheinlichkeit dafür, daß innerhalb der Periode t die Arbeitsstelle nicht ausfällt.

---

1) Vgl. GIESEN (71)

2) Vgl. hierzu HENN (85), S. 45 f.; KROMPHARDT-HENN-FÖRSTNER (115), S. 399-401; TIPPET (115), S. T 51; GRAF-HENNING (75), S. 27 ff. Beispiel 11: Betriebskontrolle von Maschinensätzen.

3) Zum Begriff der 'stochastischen Unabhängigkeit' vgl. z.B. MENGES (136), S. 98 f.

Die Wahrscheinlichkeit, daß von m Stellen k beliebige Stellen gleichzeitig innerhalb der Periode t ausfallen, wenn zu Beginn der Periode s Stellen laufen, ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse, multipliziert mit der Anzahl der Möglichkeiten, in denen sich diese Ereignisse anordnen lassen, also:

$$\binom{s}{k} \; p^k \; q^{s-k} \; := \; Q_k^s \qquad \text{(Binomialverteilung)}$$

Unter den angegebenen Voraussetzungen und der Annahme, daß alle Stellen von einem Arbeiter bedient werden, liegt ein stochastischer Prozeß mit folgender Übergangsmatrix vor:[1)]

$$Q = \begin{pmatrix} Q_0^m & Q_1^m & Q_2^m & \dots & Q_{m-2}^m & Q_{m-1}^m & Q_m^m \\ Q_0^{m-1} & Q_1^{m-1} & Q_2^{m-1} & \dots & Q_{m-2}^{m-1} & Q_{m-1}^{m-1} & 0 \\ 0 & Q_0^{m-2} & Q_1^{m-2} & \dots & Q_{m-3}^{m-2} & Q_{m-2}^{m-2} & 0 \\ 0 & 0 & Q_0^{m-3} & \dots & Q_{m-4}^{m-3} & Q_{m-3}^{m-3} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & Q_0^1 & Q_1^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & Q_0^0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Elemente der Matrix sind Übergangswahrscheinlichkeiten (bedingte Wahrscheinlichkeiten) von einem Zustand des Systems in einen anderen Zustand. So kann z. B. die erste Zeile wie folgt erklärt werden: Am Anfang einer Periode sei s = m, d.h. alle Arbeitsstellen sind einsatzfähig bzw. laufen. Die Wahrscheinlichkeit, daß das System (Arbeitsplatz) im selben Zustand bleibt, ist dann Q_0^m. Mit der Wahrscheinlichkeit Q_1^m (Q_2^m, ..., Q_m^m) geht es in einen Zustand über, in dem nur noch m - 1 (m - 2, ..., 0) Arbeitsstellen

1) Im einzelnen kann hier auf die Begriffe "stochastischer Prozeß und "Übergangsmatrix" nicht eingegangen werden. Vgl. hierzu unsere Erläuterungen zu Ende des 3. Kapitels. Als kurze Einführung sind die Ausführungen von MENGES (136), S. 152 ff., geeignet.

einsatzfähig sind bzw. laufen. Entsprechend kann die zweite (dritt, ...) Zeile erklärt werden. Ist am Anfang einer Periode s = m-1, dann geht das System mit der Wahrscheinlichkeit Q_0^{m-1} in den Zustand über, in dem alle Maschinen einsatzfähig sind; mit der Wahrscheinlichkeit Q_1^{m-1} bleibt es in diesem Zustand, usw.

$x_n(t)$ sei die Wahrscheinlichkeit dafür, daß am Ende der t. Periode n Stellen nicht einsatzfähig sind. Der Prozeß wird durch

$$x(t + 1) = x(t) \cdot Q$$

mit

$$x(t + 1) = \left[x_o(t + 1), \ldots, x_n(t + 1)\right]'$$

beschrieben.

Der Arbeitsplatz möge aus 4 zu bedienenden Stellen bestehen. Es sollen die Fälle mit 1, 2, 3, 4 Arbeitskräften untersucht werden.

Fall 1: 4 Arbeitsstellen, 1 Arbeitskraft

Ist in der t. Periode n = 0, dann lauten die bedingten Wahrscheinlichkeiten:

$$x_0 (t + 1) = q^4$$
$$x_1 (t + 1) = 4 pq^3$$
$$x_2 (t + 1) = 6p^2q^2$$
$$x_3 (t + 1) = 4p^3q$$
$$x_4 (t + 1) = p^4$$

Ist in der t. Periode n = 1, dann lauten die bedingten Wahrscheinlichkeiten:

$$x_0 (t + 1) = q^3$$
$$x_1 (t + 1) = 3pq^2$$
$$x_2 (t + 1) = 3p^2q$$
$$x_3 (t + 1) = p^3$$
$$x_4 (t + 1) = 0$$

Ist in der t. Periode n = 2, dann lauten die bedingten Wahrscheinlichkeiten:

$$x_0 (t + 1) = 0$$
$$x_1 (t + 1) = q^2$$
$$x_2 (t + 1) = 2pq$$

$$x_3\ (t+1) = p^2$$
$$x_4\ (t+1) = 0$$

Ist in der t. Periode n = 3, dann gilt für die bedingten Wahrscheinlichkeiten:

$$x_0\ (t+1) = 0$$
$$x_1\ (t+1) = 0$$
$$x_2\ (t+1) = q$$
$$x_3\ (t+1) = p$$
$$x_4\ (t+1) = 0$$

Sind zu Beginn der (t + 1). Periode alle 4 Arbeitsstellen nicht einsatzfähig (n = 4), dann wird während dieser Periode eine von ihnen bedient, so daß gilt:

$$x_0\ (t+1) = 0$$
$$x_1\ (t+1) = 0$$
$$x_2\ (t+1) = 0$$
$$x_3\ (t+1) = 1$$
$$x_4\ (t+1) = 0$$

Die Übergangsmatrix lautet also hier:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} q^4 & 4pq^3 & 6p^2q^2 & 4p^3q & p^4 \\ q^3 & 3pq^2 & 3p^2q & p^3 & 0 \\ 0 & q^2 & 2pq & p^2 & 0 \\ 0 & 0 & q & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Werden den 4 Arbeitsstellen 2,3 bzw. 4 Arbeitskräfte zugewiesen, so daß je Periode t 2, 3 bzw. 4 Stellen simultan bedient werden können, dann hat man die Übergangsmatrizen:

$$Q_2 = \begin{pmatrix} q^4 & 4pq^3 & 6p^2q^2 & 4p^3q & p^4 \\ q^3 & 3pq^2 & 3p^2q & p^3 & 0 \\ q^2 & 2pq & p^2 & 0 & 0 \\ 0 & q & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_3 = \begin{pmatrix} q^4 & 4pq^3 & 6p^2q^2 & 4p^3q & p^4 \\ q^3 & 3pq^2 & 3p^2q & p^3 & 0 \\ q^2 & 2pq & p^2 & 0 & 0 \\ q & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_4 = \begin{pmatrix} q^4 & 4pq^3 & 6p^2q^2 & 4p^3q & p^4 \\ q^3 & 3pq^2 & 3p^2q & p^3 & 0 \\ q^2 & 2pq & p^2 & 0 & 0 \\ q & p & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Spezialisierung a) p = 0,1 b) p = 0,5 c) p = 0,9 liefert folgende in Tabelle 7 angegebenen Werte:

	p = 0,1;q = 0,9	p = 0,5; q = 0,5	p = 0,9;q = 0,1
p^4	0,0001	0,0625	0,6561
$4p^3q$	0,0036	0,2500	0,2916
$6p^2q^2$	0,0486	0,3750	0,0486
$4pq^3$	0,2916	0,2500	0,0036
q^4	0,6561	0,0625	0,0001
p^3	0,0010	0,1250	0,7290
$3p^2q$	0,0270	0,3750	0,2430
$3pq^2$	0,2430	0,3750	0,0270
q^3	0,7290	0,1250	0,0010
p^2	0,0100	0,2500	0,8100
$2pq$	0,1800	0,5000	0,1800
q^2	0,8100	0,2500	0,0100

Tabelle 7: Matrixwerte (höheren Grades)

Für den stationären Zustand erhält man als Lösung der verschiedenen Gleichungssysteme die in Tabelle 8 angegebenen Lösungswerte.

Vorgegebene Wahrscheinlichkeit	Anzahl der bedienenden Arbeitskräfte	Lösungswerte[1]				
		x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
	1	0,641	0,303	0,052	0,004	0,000
p = 0,1	2	0,681	0,275	0,041	0,003	0,000
q = 0,9	3	0,683	0,273	0,041	0,003	0,000
	4	0,683	0,273	0,041	0,003	0,000
	1	0,027	0,199	0,470	0,302	0,002
p = 0,5	2	0,147	0,408	0,348	0,088	0,009
q = 0,5	3	0,186	0,408	0,297	0,097	0,012
	4	0,198	0,395	0,296	0,099	0,012
	1	0,000	0,001	0,109	0,890	0,000
p = 0,9	2	0,007	0,147	0,732	0,109	0,005
q = 0,1	3	0,028	0,312	0,406	0,236	0,018
	4	0,077	0,276	0,373	0,224	0,050

Tabelle 8: L ö s u n g s w e r t e

Zur Ermittlung der Zusammenhänge zwischen Brach- und Wartezeiten bei stochastischer Mehrstellenarbeit müssen zunächst die ermittelten Wahrscheinlichkeitswerte in Brach-, Neben- und Hauptzeitanteile umgedeutet werden. Dies geschieht wie folgt:

Die Wahrscheinlichkeit, daß n beliebige Maschinen zu gleicher Zeit stehen, die (m-n) anderen laufen, beträgt x_n, z.B. x_3. Ist der Arbeitsplatz z.B. mit 2 Arbeitern besetzt, so können 2 Maschinen gleichzeitig bedient werden, 1 Maschine wartet auf Bedienung, die restlichen (m-3) Maschinen laufen. Folglich betragen die einzelnen Zeitanteile: $\frac{1}{m} x_3$ Brachzeitanteil, $\frac{2}{m} x_3$ Nebenzeitanteil, $\frac{m-3}{m} x_3$ Laufzeitanteil. Auf diese Weise wurde folgendes Tableau erstellt.

1) Die Lösungswerte wurden mit Hilfe einer elektronischen Rechenanlage ermittelt. Rundungsfehlhr bei kleinen Wahrscheinlichkeitswerten sind nicht auszuschließen.

Von 4 Stellen laufen	stehen	Aufteilung des Wahrscheinlichkeitswertes Brachzeitanteil	Nebenzeitanteil	Hauptzeitanteil
Fall 1:	1 Bedienungsarbeiter			
4	0	-	-	x_0
3	1	-	$1/4\ x_1$	$3/4\ x_1$
2	2	$1/4\ x_2$	$1/4\ x_2$	$2/4\ x_2$
1	3	$2/4\ x_3$	$1/4\ x_3$	$1/4\ x_3$
0	4	$3/4\ x_4$	$1/4\ x_4$	-
Summe:				
Fall 2:	2 Bedienungsarbeiter			
4	0	-	-	x_0
3	1	-	$1/4\ x_1$	$3/4\ x_1$
2	2	-	$2/4\ x_2$	$2/4\ x_2$
1	3	$1/4\ x_3$	$2/4\ x_3$	$1/4\ x_3$
0	4	$2/4\ x_4$	$2/4\ x_4$	-
Summe:				
Fall 3:	3 Bedienungsarbeiter			
4	0	-	-	x_0
3	1	-	$1/4\ x_1$	$3/4\ x_1$
2	2	-	$2/4\ x_2$	$2/4\ x_2$
1	3	-	$3/4\ x_3$	$1/4\ x_3$
0	4	$1/4\ x_4$	$3/4\ x_4$	-
Summe:				
Fall 4:	4 Bedienungsarbeiter			
4	0	-	-	x_0
3	1	-	$1/4\ x_1$	$3/4\ x_1$
2	2	-	$2/4\ x_2$	$2/4\ x_1$
1	3	-	$3/4\ x_3$	$1/4\ x_3$
0	4	-	x_4	-
Summe:				

Die Summe der ermittelten Zeitanteile x 100 ergibt die im Mittel anfallende Brach-, Neben- bzw. Hauptzeit. Da die genannten Zeitanteile in Prozent von $\underline{6}$ angegeben werden, handelt es sich um sogenannte Zeitkenngrade. (Vgl. Kapitel 144). Die mittlere Anzahl der wartenden, der in Bedienung befindlichen und der laufenden Stellen erhält man, indem man den ermittelten Prozentsatz mit der Anzahl der Stellen multipliziert.

Unter Benutzung der Kurzzeichen:

m	Anzahl Stellen
$\bar{m}_{Ba}$	Mittlere Anzahl wartender Stellen
$\bar{m}_n$	Mittlere Anzahl in Bedienung befindlicher Stellen
$\bar{m}_h$	Mittlere Anzahl laufender Stellen
t	Gesamtzeit, die zur Bedienung einer Stelle erforderlich ist
ζ	Mittlerer Brachzeitgrad
δ	Mittlerer Nebenzeitgrad
γ	Mittlerer Hauptzeitgrad
ε	Mittlerer Nutzungszeitgrad

gelten folgende Zusammenhänge:

(1.48) $\bar{m}_h : \bar{m}_n : \bar{m}_{Ba} : m = \bar{T}_h : \bar{T}_n : \bar{T}_{Ba} : t$

(1.49) $$\bar{m}_h = \frac{\bar{T}_h \cdot m}{t} = \gamma \cdot m$$

(1.50) $$\bar{m}_n = \frac{\bar{T}_n \cdot m}{t} = \delta \cdot m$$

(1.51) $$\bar{m}_{Ba} = \frac{\bar{T}_{Ba} \cdot m}{t} = \zeta \cdot m$$

Im F a l l 1[1)] kann während der Zeit t maximal eine Stelle bedient werden. Im Mittel werden aber $\bar{m}_n$ ($\bar{m}_n \leqslant 1$) Stellen bedient, so daß für die mittlere Tätigkeitszeit in Prozent von t gilt

(1.52.1) $$\alpha_1 = \frac{\bar{m}_n}{1} \quad 100$$

1) Vier Arbeitsstellen, eine Arbeitskraft.

Die mittlere Wartezeit in Prozent von 6 ist folglich

(1.53.1) $$\beta_1 = 100 - \alpha_1$$

Im F a l l $2^{1)}$ können während der Zeit t maximal zwei Stellen bedient werden. Im Mittel werden wiederum $\bar{m}_n$ ($\bar{m}_n \leqslant 2$) Stellen bedient, so daß gilt

(1.52.2) $$\alpha_2 = \frac{\bar{m}_n}{2} \; 100$$

(1.53.2) $$\beta_2 = 100 - \alpha_2$$

Entsprechend gilt für F a l l $3^{2)}$

(1.52.3) $$\alpha_3 = \frac{\bar{m}_n}{3} \; 100$$

(1.53.3) $$\beta_3 = 100 - \alpha_3$$

und F a l l $4^{3)}$

(1.52.4) $$\alpha_4 = \frac{\bar{m}_n}{4} \; 100$$

(1.53.4) $$\beta_4 = 100 - \alpha_4$$

Die Arbeiter- und Betriebsmittelzeitkenngrade (in %) für das Zahlenbeispiel p = 0,1; p = 0,5; p = 0,9 sind in Tabelle 9 ausgewiesen.

1) Vier Arbeitsstellen, zwei Arbeitskräfte.
2) Vier Arbeitsstellen, drei Arbeitskräfte.
3) Vier Arbeitsstellen, vier Arbeitskräfte.

Vorgegebene Wahrschein-lichkeit	Anzahl der bedienenden Arbeitskräfte	Zeitkenngrade-Betriebsmittel				-Arbeiter	
		Brachzeit-	Nebenzeit-	Hauptzeit-	Nutzzeit-	Tätigkeitszeit-	Wartezeit-
	1	1,5	9,0	89,5	98,5	36,0	64,0
p = 0,1	2	0,1	9,1	90,8	99,9	18,2	81,8
q = 0,9	3	-	9,0	91,0	100,0	12,0	88,0
	4	-	9,0	91,0	100,0	9,0	91,0
	1	27,0	24,4	48,6	73,0	97,6	2,4
p = 0,5	2	2,6	32,5	64,9	97,4	65,0	35,0
q = 0,5	3	0,3	33,3	66,4	99,7	44,4	55,6
	4	-	33,3	66,7	100,0	33,3	66,7
	1	47,1	25,0	27,9	52,9	100,0	-
p = 0,9	2	2,9	46,1	51,0	97,1	92,2	7,8
q = 0,1	3	0,4	47,2	52,4	99,6	62,9	37,1
	4	-	47,3	52,7	100,0	47,3	52,7

Tabelle 9: Arbeiter- und Betriebsmittelzeitkenngrade bei stochastischer Mehrstellenarbeit

Der Verlauf der Brach- und Wartezeiten in Abhängigkeit der Arbeitskräfteanzahl und der Ausfallwahrscheinlichkeit ist in Abbildung 26 wiedergegeben.

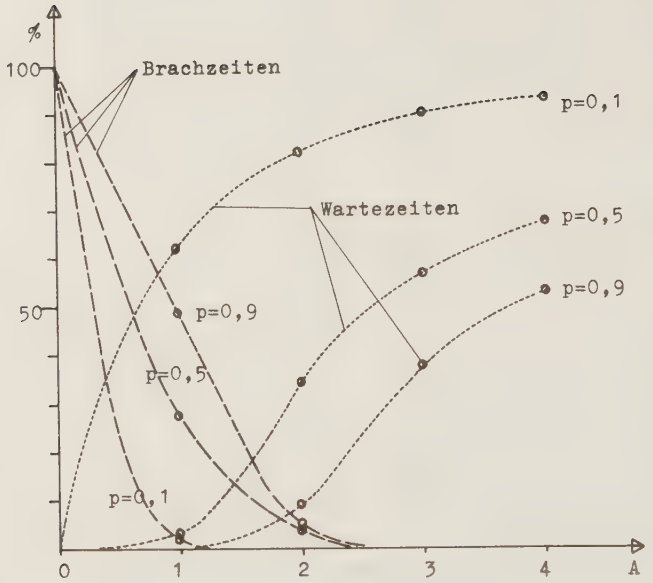


Abb.26: Brach- und Wartezeiten bei stochastischer Mehrstellenarbeit

Beispiel und Abbildung machen folgendes deutlich:

Mit steigendem Einsatz des Bedienungspersonals fallen die Brachzeiten, steigen die Wartezeiten. Brachzeiten sind nur dann zu vermeiden, wenn entweder jeder Stelle eine Arbeitskraft zugeordnet wird oder wenn die Ausfallwahrscheinlichkeit sehr gering ist. In beiden Fällen ist jedoch dann mit hohen Wartezeiten zu rechnen. Umgekehrt sind hohe Wartezeiten nur dann zu vermeiden, wenn die Arbeitskräfteanzahl für einen bestimmten Arbeitsplatz klein gehalten wird oder eine hohe Ausfallwahrscheinlichkeit vorliegt.

144 Zeitkenngrade bei Mehrstellenarbeit

In der Literatur verwendet man für die Analyse verschiedener Probleme der Mehrstellenarbeit oft sogenannte Z e i t k e n n g r a d e. Sie geben das Verhältnis unterschiedlicher Zeitarten wieder, sind daher

dimensionslos und deshalb gut zur Beschreibung verschiedener Formen der Mehrstellenarbeit geeignet. Aus diesem Grund sollen die gebräuchlichsten Kenngrade kurz angegeben werden. In der Literatur verwandte synonyme Bezeichnungen sind in Klammern angegeben.

1. T ä t i g k e i t s z e i t g r a d des Arbeiters (Lastgrad, operative efficiency, operative utilization)

$$\alpha = \frac{T_t}{T_g}$$

2. W a r t e z e i t g r a d des Arbeiters (Wartegrad, coefficient d'inactivité)

$$\beta = \frac{T_w}{T_g} = 1 - \alpha$$

3. H a u p t z e i t g r a d des Betriebsmittels (Laufzeitgrad, machine efficiency, machine availability)

$$\gamma = \frac{T_h}{T_{Mg}}$$

4. N e b e n z e i t g r a d des Betriebsmittels (normal loss due to repairs)

$$\delta = \frac{T_n}{T_{Mg}}$$

5. N u t z u n g s z e i t g r a d des Betriebsmittels (Nutzgrad, Nutzeffekt, Ausnutzungsgrad, Wirkungsgrad, over-all efficiency, maskineras utnyttjningsgrad)

$$\varepsilon = \frac{T_N}{T_{Mg}} = \gamma + \delta$$

6. B r a c h z e i t g r a d des Betriebsmittels (Interferenzzeitgrad, coefficient of loss due to interference, coefficient d'indisponibilité par machine)

$$\eta = \frac{T_{Ba}}{T_{Mg}} = 1 - \varepsilon$$

7. S t i l l s t a n d s z e i t g r a d (Stillstandsgrad, combined coefficient of loss)

$$\eta = \frac{T_n + T_{Ba}}{T_{Mg}} = \delta + \zeta$$

2 DAS PROBLEM DER ZIELSETZUNG FÜR DIE BESTIMMUNG OPTIMALER BEDIENUNGSSYSTEME

Jede Kombination von Produktionsfaktoren hat, wenn sie rational sein soll, nach dem Prinzip der Wirtschaftlichkeit zu erfolgen[1]. Insbesondere dann, wenn - wie bei Mehrstellenarbeit - eine Wahlmöglichkeit zwischen mehreren Faktorkombinationen besteht, ist dieses Prinzip als generelle Maxime für das wirtschaftliche Handeln zu beachten. Betrachtet man jedoch den Betrieb in seiner Umwelt, so zeigt sich, daß in marktwirtschaftlich orientierten Wirtschaftsverfassungen neben das Prinzip der Wirtschaftlichkeit ein Prinzip tritt, das GUTENBERG zu den "systembezogenen" Beständen zählt, nämlich das erwerbswirtschaftliche Prinzip. Dieses Prinzip bildet die Maxime, nach der die Unternehmensleitung ihre Entscheidungen trifft[2].

Trotz aller Einwände und Einschränkungen, die das erwerbswirtschaftliche Prinzip in Literatur und Praxis erfahren hat, halten wir die Erzielung eines möglichst hohen Gewinnes für eine betriebswirtschaftlich sinnvolle Zielsetzung der Unternehmenspolitik[3]. Aus diesem obersten Grundsatz ist der Optimalbegriff, den wir zugrunde legen wollen, abzuleiten[4]. Für Betriebe, die in Auftragsfertigung produzieren und für die die Preise der betrieblichen Produkte feststehen, sei es, daß sie aufgrund staatlichen Dekrets fixiert, sei es, daß sie in freier Vereinbarung festgelegt wurden, bedeutet dies, daß sie ein solches Bedienungssystem zu bestimmen haben, bei dem die Kosten für eine gegebene Produktmenge minimiert werden. Umgekehrt werden Betriebe, die für den anonymen Markt produzieren, solche Bedienungssysteme zu ermitteln haben, bei denen die Differenz aus Erlös und Kosten, gemeinhin als Gewinn bezeichnet, ein Maximum wird.

21 Darstellung möglicher Zielvorstellungen und deren Kritik

1. Ausgangspunkt für die Zuteilung mehrerer Arbeitsstellen an einen Arbeiter oder eine Gruppe von Arbeitskräften war die zu beobachtende Tatsache, daß mit zunehmender Stellenzahl - bei konstanter Arbeitskräfteanzahl - die Wartezeiten verkürzt werden und damit eine bessere Auslastung der menschlichen Arbeitskraft erzielt werden kann. Es verwundert daher nicht, daß von manchen Autoren eine möglichst hohe

1) Vgl. GUTENBERG (78), S. 31; KILGER (102), S. 8
2) Vgl. GUTENBERG (77), S. 452 f.
3) Vgl. auch FERNER (50), S. 19-32
4) Vgl. KOCH (108), S. 160: "Der Optimalbegriff wird unmittelbar aus dem obersten Grundsatz abgeleitet, der das betriebliche Geschehen bestimmen soll."

Ausnutzung des Faktors "Arbeit" gefordert wird[1]. Dieses sogenannte "A u s l a s t u n g s o p t i m u m" oder "Optimum der zeitlichen Beanspruchung des Arbeiters", wie es auch genannt wird, ist genau dann erreicht, wenn der Tätigkeitszeitgrad des Arbeiters gleich Eins bzw., was dasselbe bedeutet, wenn der Wartezeitgrad des Arbeiters gleich Null ist. So fordert z.B. TIMME, "...daß die Summe der Lastgrade für die gleichzeitig zu bedienenden Maschinen oder Arbeitsstellen 100 v.H. sein muß."[2] Er glaubt: "Damit ist eines der wesentlichsten Gesetze für die Mehrstellenarbeit gefunden."[2] Am schärfsten formuliert es ZUMPE: "Die optimale Stellenzahl wird durch einen optimalen Arbeitsbelastungsgrad bestimmt."[3]

Die Forderung nach maximaler Auslastung des Arbeiters ist unseres Erachtens historisch zu erklären, standen doch lange Zeit die Entwicklung der Arbeitswissenschaft, der Vorgabezeitermittlung und der Arbeitsbewertung im Vordergrund betriebswirtschaftlichen Interesses. Unausgelastete Arbeitskräfte wurden im Zusammenhang mit den Problemen der Mehrstellenarbeit als unwirtschaftlich angesehen. Daß der Einsatz der Arbeitskräfte im Zusammenhang mit dem gesamten Kombinationsprozeß gesehen werden muß, wurde nicht beachtet. So schreibt BEDORF: "Man übersieht, daß es nicht nur auf die maximale Auslastung des arbeitenden Menschen ankommt und daß die Produktion auf einem Zusammenwirken aller produktiven Faktoren beruht."[4] Und ALBERS: "Diese Formulierung (des Auslastungsoptimums, d. Verf.) macht deutlich, daß es sich dabei nicht um ein sinnvolles Optimum handeln kann. Die Lohnkosten bilden in den Faktorkombinationen lediglich einen Bestandteil, dem vom Kostenstandpunkt aus nicht mehr und nicht weniger Bedeutung zukommt als den anderen Kostenarten."[5] GIESEN bemerkt hierzu: "...die Frage der Auslastung des Arbeiters (kann, d.Verf.) niemals das einzige Kriterium für die Wahl der Arbeitsplatzgröße sein."[6] Weiterhin ist kritisch zu bemerken, daß der Tätigkeits- oder Wartezeitgrad, den es zu maximieren bzw. zu minimieren gilt, einen technischen Wirtschaftlichkeitsquotienten darstellt, der bei einer ökonomischen Betrachtungsweise der Mehrstellenarbeit keine Bedeutung hat[7].

2. Eine weitere in der Literatur erhobene Forderung lautet dahingehend,

1) Vgl. hierzu KÖB (109), S. 675; MEINING (135), S. 713; METZGER (137), S. 1206; TIMME (192), S. 138-141; KAESEWURM (96), S. 43-47;WEDEKIND (205), S. 23; WEDEKIND (208),S. 429-434; WEDEKIND (206),S.1238-1241.
2) TIMME (192), S. 140
3) ZUMPE (219), S. 943
4) BEDORF (11), S. 177
5) ALBERS (1), S. 27
6) GIESEN (107, S. 424
7) Vgl. hierzu HERTLEIN (87), S. 357-375. Bei einer ökonomischen Betrachtungsweise müssen die Teilzeiten b e w e r t e t werden.

ein solches Bedienungssystem zu ermitteln, bei dem der Nutzungszeitgrad möglichst hoch ist[1]. Fragen wir nach dem Zweck, den ein solches Optimum erfüllen soll, so ergibt sich : N u t z u n g s z e i t g r a d m a x i m i e r u n g ist identisch mit Ausbringungsmaximierung. Die Nutzungszeit nämlich setzt sich bekanntlich aus Haupt- und Nebenzeit zusammen. Da die Nebenzeit jedoch zur Herstellung einer Leistungseinheit oder mehrerer Leistungseinheiten unbedingt erforderlich ist, folglich als "produktive" Zeit angesehen werden muß, ist leicht einzusehen, daß bei Vorliegen eines Nutzungszeitgradmaximums gleichzeitig die Ausbringung ein Maximum erreicht. Diesen Zusammenhang bestätigt BÖHM: "Die Ausbringung steigt solange bis die Überlappungszeiten praktisch verschwunden sind; das wäre dann die Stellenzahl maximaler Ausbringung..."[2]

Es bedarf keiner besonderen betriebswirtschaftlichen Begründung, daß Ausbringungsmaximierung "um jeden Preis" eine wenig sinnvolle Zielsetzung darstellt. Abgesehen davon, daß bestimmte Prämissen bezüglich Kosten- und Erlösverlauf erfüllt sein müssen, damit Ausbringungs- mit Gewinnmaximierung übereinstimmen, werden der Maximierung der Ausbringung in der Regel Absatzrestriktionen entgegenstehen[3]. Im übringen gelten die Einwände, die wir im Abschnitt 1 dieses Kapitels erhoben haben, entsprechend.

3. GROSS[4] und E. WEDEKIND[5] geben noch ein weiteres Optimum an, das von WEDEKIND als "a r b e i t s t e c h n i s c h e s O p t i m u m" bezeichnet wird. Er versteht darunter "die Arbeitsplatzgröße (Stellenzahl) bei möglichst hohem Nutzgrad der Betriebsmittel und möglichst hohem Lastgrad des Arbeiters..."[6] Abgesehen von der unkorrekten Formulierung WEDEKINDS[7], ist auch ein solches Optimum wenig sinnvoll. Das hier postulierte Zielsystem umfaßt zwei Einzelziele, die bei Mehrstellenarbeit miteinander konkurrieren. Aus der ökonomischen Entscheidungslogik folgt jedoch zwingend, "...Einzelziele nur bis zu jenem Grade zu verwirklichen, bei dem der marginale Vorteil (Grenznutzen) noch nicht durch die marginalen Nachteile in bezug auf konkurrierende Zielsetzungen (Alternativkosten) aufgewogen wird."[8]

1) Vgl. WEDEKIND (206), S. 1238
2) BÖHM (24), S. 120
3) Vgl. Kapitel 23
4) GROSS (76), S. 113-116
5) WEDEKIND (206), S. 1338
6) WEDEKIND (206), S. 1338
7) Exakt müßte es heißen: Bei gegebenem Nutzzeitgrad (Tätigkeitszeitgrad) ist eine Arbeitsplatzgröße anzustreben, bei der der Tätigkeitszeitgrad (Nutzzeitgrad) ein Maximum erreicht.
8) GIERSCH (69), S. 23

Die gleiche Kritik gilt für das von FRACKENPOHL[1] und E. WEDEKIND[2] vorgeschlagene "t e c h n i s c h e A u s n u t z u n g s o p t i m u m", das im Schnittpunkt der Nutzzeitgradkurve mit der Tätigkeitszeitgradkurve liegt. RIES schreibt hierzu: "Es bedarf keiner besonderen mathematischen Vorbildung, um zu erkennen, daß von irgendeiner Beziehung zwischen technischem und wirtschaftlichem Optimum hier nicht die Rede sein kann."[3] FRACKENPOHL hat jedoch richtig erkannt, daß es auf das technische Ausnutzungsoptimum für eine Beurteilung der Wirtschaftlichkeit der Mehrstellenarbeit allein nicht ankommt, wenn er schreibt: "Ihre wirtschaftliche Gestaltung kann nur ermittelt werden, wenn man die Kosten in die Überlegungen einbezieht..."[4] Einer diesbezüglichen Kritik BEDORFS[5] zeigt sich E. WEDEKIND jedoch verschlossen, wenn er entgegnet: "Es gibt Fälle, bei denen für die Bestimmung der Arbeitsplatzgröße weder die Stellenzahl bei voller Auslastung des Arbeiters noch die Stellenzahl bei kostengünstiger Fertigung, sondern allein das technische Optimum ausschlaggebend ist."[6] WEDEKIND nennt dann die Prämissen, unter denen dieser Fall eintreten soll. Seine Darlegungen sind jedoch theoretisch nicht haltbar und von RIES mit Recht kritisiert worden: "Nicht nur, daß hier technisches Ausnutzungsoptimum und höchstmögliche Ausbringung gleichgesetzt werden. Wedekind konstruiert sogar einen Zusammenhang zwischen technischem Optimum und Gewinnmaximum."[7] Einen solchen Zusammenhang kann es jedoch nicht geben. Wir stimmen mit RIES überein, wenn er das technische Optimum WEDEKINDS als einen "nichtssagenden Begriff" bezeichnet und allein eine "fachgerechte Handhabung betriebswirtschaftlicher Methoden" fordert.[8]

4. Fast alle Methoden zur Bestimmung eines ökonomisch-optimalen Bedienungssystems bestimmen dieses als ein Kostenminimum. Eine genauere Untersuchung der Zusammenhänge zwischen Kostenminimierung und der zielentsprechenden Gestaltung des Bedienungssystems erfolgt in Kapitel 22. An dieser Stelle seien nur eine Reihe von Literaturmeinungen wiedergegeben, die einige Ansichten über den Inhalt des Kostenminimierungsprinzips widerspiegeln.

1) FRACKENPOHL (60), S. 211
2) WEDEKIND (203), S. 6-12
3) RIES (163), S. 81
4) FRACKENPOHL (60), S. 211
5) BEDORF (11), S. 172-188
6) WEDEKIND (204), S. 445
7) RIES (163), S. 83
8) RIES (163), S. 83

Am häufigsten wird gefordert, ein optimales Bedienungssystem müsse so beschaffen sein, daß die S t ü c k k o s t e n e i n M i n i m u m aufweisen. So schreibt ALBERS: "In Ansehung dieser Maxime (das Wirtschaftlichkeitsprinzip, d. Verf.) muß man die optimale Stellenzahl als diejenige Arbeitsplatzgröße definieren, bei der die Fertigungskosten pro Leistungseinheit ein Minimum ausmachen."[1)]
Und RIES: "Es gilt, die wirtschaftlich optimale Stellenzahl zu ermitteln, d. h. diejenige Arbeitsplatzgröße, bei der die Fertigungskosten pro Leistungseinheit am niedrigsten sind."[2)] Auch E. WEDEKIND ist in seinen Untersuchungen der Ansicht, daß diejenige Arbeitsplatzgröße kostenoptimal sei, bei der die "...geringsten Fertigungskosten je Leistungseinheit..."[3)] anfallen. Und an anderer Stelle schreibt er: "Und zwar ist diejenige Stellenzahl als die wirtschaftlich günstigste zu bezeichnen, bei der die geringsten Fertigungskosten je Leistungseinheit anfallen."[4)] Auch H. WEDEKIND teilt diese Ansicht[5)].

Aus einer Gewinnfunktion (a.a.O., S. 62) wird deutlich, daß in der bei ihm aufgestellten Kostenfunktion (a.a.O., S. 35 und S. 58) Stückkosten gemeint sind. Auch WINKEL und mit ihm der Verband für Arbeitsstudien - REFA e.V. - stellen die Forderung auf, "...die Produktion mit geringstem Kostenaufwand durchzuführen, also das Optimum der Fertigungskosten zu erzielen. Bei Mehrstellenarbeit handelt es sich dabei um die Bestimmung derjenigen Stellenzahl, bei der die Kosten je Leistungseinheit am niedrigsten liegen."[6)]
In der ausländischen Literatur herrscht ebenfalls die Meinung vor, die Stückkosten zu minimieren. "...there is a machine assignment which will minimize the total cost per unit of output", schreibt MANGELSDORF in seiner Studie über Mehrstellenarbeit[7)]. PALM, auf dessen grundlegende Arbeit wir noch zurückkommen, sagt: "Die zu minimierende Größe sind die Kosten je Einheit des gefertigten Produktes."[8)] Und schließlich LE GALL: "Il s'agit de rendre minimum le prix de revient..."[9)]

Aus den Ausführungen dieser Autoren geht zumeist nicht hervor, ob sie eine Ausbringung suchen, bei der die Funktion

---

1) ALBERS (1), S. 24
2) RIES (163), S. 51
3) WEDEKIND (208), S. 431
4) WEDEKIND (205), S. 20
5) WEDEKIND (211), S. 35, 58, 62
6) WINKEL (218), S. 46
7) MANGELSDORF (128), S. 258
8) PALM (155), S. 296
9) LE GALL (120), S. 423

(2.1) $$\frac{K(x)}{x} = k(x)$$

$K(x)$: = Gesamtkostenfunktion in Abhängigkeit von der Ausbringung

x : = Ausbringungsmenge

$k(x)$: = Stückkostenfunktion

ein Minimum aufweist, oder ob die Stückkosten bei gegebener Ausbringung ein Minimum sein sollen. Allein die zweite Version - also Minimierung der Kennzahl Stückkosten - kann eine sinnvolle Zielsetzung sein und zu einem Optimum führen. Denn die Kostenkurve eines rational handelnden Betriebes, der mehrere Bedienungssysteme realisieren kann, ist solange nicht eindeutig bestimmt, wie nicht jeder Produktmenge die Kosten desjenigen Bedienungssystems zugeordnet werden, dessen Realisierung zu den niedrigstmöglichen Kosten führt. Und das ist hier ja gerade das Problem. Es gilt, für jedes Ausbringungsniveau ein Minimum des Ausdrucks

(2.2) $$\frac{K(x)}{x_{const.}}$$

bzw.

(2.3) $$\frac{K(x)_{const.}}{x}$$

anzustreben. Darüber hinaus das minimum minimorum der so entstehenden Kostenfunktion zu bestimmen, ist nicht eine Frage des optimalen Bedienungssystems, sondern ein Problem, welches ganz anderen Bereichen entstammt; jedenfalls setzt die Lösung dieses zweiten Problems die Beantwortung der Frage nach dem - in welchem Sinne auch immer - optimalen Bedienungssystem bereits voraus. Dieser Ansicht ist auch v. STAKKELBERG: "Unter allen Aufwandsniveaus, welche zur Erzielung eines bestimmten Produktionsniveaus geeignet sind, gibt es eins, welches die niedrigsten Gesamtkosten aufweist. Die Gesamtkosten dieses Aufwandsniveaus bezeichnen wir als Gesamtkosten des betreffenden Produktionsniveaus."[1] Diese Formulierung des Wirtschaftlichkeitsprinzips bedeutet die Forderung nach Minimierung von (2.2) bzw. (2.3). Der Ausdruck (2.2) hat ein Minimum, wenn $K(x)$ minimal wird. Umgekehrt wird (2.3) minimal, wenn x ein Maximum wird.

1) STACKELBERG (182), S. 8 f.

Zumindest E. WEDEKIND[1], H. WEDEKIND[2], BEDORF[3] und RIES[4] sind der Ansicht, man solle eine Stückkostenf u n k t i o n minimieren. Dieser Forderung muß entschieden widersprochen werden, da unseres Erachtens die Beantwortung dieser Frage eine Lösung des eigentlichen Problems schon voraussetzt. Bestimmt werden soll doch zunächst einmal für ein bestimmtes Produktions- oder Aufwandsniveau ein Minimum im Sinne der Ausdrücke (2.2) bzw. (2.3). Erst dann kann man überlegen, ob ein Minimum der in dieser Weise gewonnenen Funktion noch weitere Betrachtungen wert ist. Eine Minimierung des Ausdrucks (2.1) setzt eine gekrümmte Gesamtkostenfunktion voraus, wenn man nicht zu trivialen Ergebnissen kommen will[5]. Dies geht auch aus den Ausführungen BEDORFS und RIES' eindeutig hervor. "Erst wenn auf Grund einer weiteren Vermehrung der Stellenzahl die Grenzkosten gleich den Durchschnittskosten werden ist das Kostenoptimum erreicht."[6] "Das Kostenoptimum liegt bei derjenigen Stellenzahl, bei der ... Grenzkosten und Durchschnittskosten, bezogen auf die Leistungseinheit, gleich sind."[7] Grenz- und Durchschnittskosten sind immer im Durchschnittskostenminimum einander gleich.[8]

Die Bestimmung der kostenminimalen Faktorkombination für aus heterogenen Betriebsmitteln bestehende Arbeitsplätze, an denen zudem noch heterogene Produkte hergestellt werden, stehen jedoch unlösbare Zurechnungsprobleme entgegen. Brach- und Wartezeiten lassen sich dann einzelnen Produkten nicht mehr verursachungsgemäß zurechnen. Somit könnte eine Stückkostenminimierung ohnehin nur an homogenen Arbeitsplätzen, die mit gleichartigen Produkten belegt sind, erfolgen.

Die Ermittlung kostenoptimaler Bedienungssysteme durch Minimierung einer Stückkostenfunktion ist aus obengenannten Gründen abzulehnen. Hinzu treten rechentechnische Probleme, weil die Ermittlung von Bedienungssystemen nur mit Hilfe einer ganzzahligen Variation der Zahl der eingesetzten Arbeitskräfte möglich ist[9]. Das zur Bestimmung von Kostenminima sonst übliche Verfahren - die Differentialrechnung - kann aus diesem Grunde nicht angewandt werden, da die Kostenfunktion nicht stetig und infolgedessen nicht differenzierbar ist.

---

1) WEDEKIND (210), S. 167
2) WEDEKIND (211), S. 35, 58
3) BEDORF (11), S. 182
4) RIES (163), S. 59
5) Zwar kann man auch die Stückkostenfunktion einer linearen Gesamtkostenfunktion der allgemeinen Form $K = ax + b$ minimieren, jedoch liegt das Minimum
   a) falls gilt $0 \leq x \leq c$, bei $x = c$ oder
   b) falls nur gilt $x \geq 0$, bei $x = \infty$
6) Vgl. Anm. 4, ebenda
7) Vgl. Anm. 5, ebenda
8) Zum Beweis dieser Behauptung vgl. KILGER (102), S. 41, Anm. 22
9) Prämisse: Konstante Arbeitsstellenanzahl

Abschließend ist also festzustellen, daß nur eine Gesamtkostenminimierung bei gegebenen Auftragsmengen, die dann identisch mit einer Stückkostenminimierung ist, sinnvoll sein kann. Dieser Ansicht ist auch FETTER: "The economic problem is that of determining the assignment which minimizes the cost of a given output."[1] Der Ganzzahligkeitsprämisse ist durch geeignete Optimierungsverfahren besonders Rechnung zu tragen.

5. Betriebe der freien Marktwirtschaft, die für den anonymen Markt produzieren, werden bestrebt sein, das erwerbswirtschaftliche Prinzip zu realisieren. In diesem Sinne werden sie ein Bedienungssystem dann als optimal ansehen, wenn dabei ein Gewinnmaximum erzielt wird. Da unseres Erachtens die Gewinnerzielung in besonderem Maße dazu geeignet ist, langfristig "...Existenz und Wachstum des Unternehmens..."[2] zu sichern, ist es verwunderlich, daß diese Erkenntnis in der Literatur über Mehrstellenarbeit keinen stärkeren Niederschlag bei der Aufstellung von Entscheidungsmodellen gefunden hat. In der deutschen Literatur sind es unseres Wissens lediglich ALBERS, FERSCHL[3], FRACKENPOHL, KÖB[4], E. WEDEKIND, H. WEDEKIND und WINKEL, die auf eine "gewinnoptimale Stellenzahl" hinweisen. Von diesen Autoren tritt am stärksten ALBERS für ein Gewinnstreben ein: "In the long run wird daher jeder Betrieb in der erwerbswirtschaftlich orientierten Wirtschaftsverfassung versuchen, die gewinnoptimale Stellenzahl zu realisieren, die letztlich das allein entscheidende Kriterium für die Bestgestaltung der Arbeit bildet."[5] FRACKENPOHL erkennt, "...daß die nur kostenmäßige Beurteilung der Wirtschaftlichkeit u. U. zu eng ist für die Ableitung einer betrieblichen Entscheidung"[6] und fordert gegebenenfalls ein gewinnoptimales Bedienungssystem zu ermitteln. Auch E. WEDEKIND und H. WEDEKIND machen sich "Gedanken zu einer Gewinnfunktion"[7], denen man aber nicht in allen Punkten folgen kann. So schreibt H. WEDEKIND: "Da bei der Ableitung einer Gewinnfunktion ein marktorientierter Preis mit in die Rechnung eingeht, der von der Marktform abhängt, in der die Betriebswirtschaft arbeitet, ergeben sich neben kalkulatorischen Komplikationen Schwierigkeiten bei der Bestimmung der Preis-

1) FETTER (53), S. 23
2) FERNER (50), S. 30
3) FERSCHL (51), S. 105 ff
4) KÖB (109), S. 675
5) ALBERS (1), S. 113
6) FRACKENPOHL (60), S. 218
7) WEDEKIND (210), S. 169; WEDEKIND (211), S. 62

funktion."[1] Worin die "kalkulatorischen Komplikationen" bestehen, wird nicht gesagt. H. WEDEKIND spricht dann weiter von einem "...marktorientierten Preis der betrachtenden Fertigungsstufe..."[2] Wir können die "Gedanken" WEDEKINDS nur so auslegen, daß er Marktpreise für jede Fertigungsstufe eines Betriebes ermitteln will. Hierbei ergeben sich allerdings nicht nur "kalkulatorische Komplikationen", sondern dieser Versuch muß als unmöglich bezeichnet werden. Wir sind mit KILGER der Ansicht: "Ganz unmöglich erscheint es jedoch, die Preise ... der betrieblichen Produkte so zu differenzieren, daß allen am Absatz und der Produktion mitwirkenden Betriebsabteilungen ein Anteil zugerechnet wird."[3] Eine"Funktion des Fertigungsgewinnes"[4], wie H. WEDEKIND sie aufstellt, kann es daher nicht geben.
E. WEDEKIND macht sich im III. Teil seines Buches: Die Plankostenrechnung..., a.a.O., die Ausführungen H. WEDEKINDS zu eigen[5]. Auch der Verband für Arbeitsstudien - REFA e.V. - und WINKEL anerkennen: "Die wirtschaftliche Ergiebigkeit wird letzten Endes nicht durch die niedrigsten Fertigungskosten bestimmt, sondern durch den höchsten Gewinn, der sich aus der Spanne zwischen Kosten und Preis, multipliziert mit der jeweiligen Ausbringungsmenge, ergibt."[6] WINKEL bezeichnet dieses Optimum als "Ertragsoptimum." In der Betriebswirtschaftslehre versteht man jedoch unter "Ertrag" den Bruttowertzuwachs einer Unternehmung. Insofern ist die Bezeichnung WINKELS ungenau.

Wenn anfangs gesagt wurde, daß die Gewinnmaximierung im Zusammenhang mit den Problemen der Mehrstellenarbeit in der Literatur zu wenig Beachtung gefunden hat, so haben wir dabei nicht die Autoren im Sinne gehabt, die für eine O p p o r t u n i t ä t s k o s t e n m i n i m i e r u n g eintreten. Streng genommen müssen sie zu den Vertretern der Gewinnmaximierung hinzugerechnet werden; dies soll im folgenden näher erläutert werden. Betrachten wir zunächst einige Literaturmeinungen. So schreibt FERSCHL: "In Entscheidungsmodellen wird man im allgemeinen abzuwägen haben zwischen den Kosten für den laufenden Betrieb der Servicestellen und dem Gewinnentgang, der durch die am vollbesetzten System abgewiesenen Einheiten verursacht wird."[7] HENN glaubt: "Bei

1) WEDEKIND (211), S. 62
2) WEDEKIND (211), S. 62. Richtig muß es wohl heißen"...der zu betrachtenden Fertigungsstufe..."
3) KILGER (103), S. 35
4) WEDEKIND (211), S. 62
5) WEDEKIND (210), S. 169. In der "Funktion des Fertigungsgewinnes" handelt es sich bei den Kurzzeichen G_M und G_A offensichtlich um einen Druckfehler. Vgl. auch WEDEKIND (208), S. 429, 431. Hier spricht WEDEKIND von einem "Verrechnungsgewinn am Arbeitsplatz";der Preis wird "als innerbetrieblicher Verrechnungspreis angesetzt".
6) WINKEL (218), S. 51
7) FERSCHL (51), S. 102

zu kleinen Reparaturabteilungen entstehen durch Maschinenausfall Gewinnschmälerungen."[1] Insbesondere in der anglo-amerikanischen Literatur wird eine Opportunitätskostenminimierung empfohlen. "If an operator looks after too few machines the labour cost is high, and if the operator looks after too many machines the cost of lost output becomes appreciable. These costs have to be balanced so that the total cost per unit of production is minimised."[2] Die Verfasser treten gleichzeitig für eine Opportunitäts-Stückkostenminimierung ein. Ein anderes Autorenteam ist der Ansicht: "Therefore, the objective is to find an economic balance between the cost of unproductive machines and the cost of maintaining a specific service factor."[3] Und an anderer Stelle wird erläutert: "If expensive production machinery waits for operator attention, the loss of profit may be sizable..."[4] Und schließlich MORSE: "For the maintenance operation we may wish to balance the average loss caused by idle machines waiting repair against the cost of the maintenance crew."[5] Auch das "Handbuch des Industrial Engineering" empfiehlt eine Opportunitätskostenminimierung.[6] Aus den Zitaten wird deutlich, daß die Maschinenbrachzeiten mit dem Gewinn- oder Nutzenentgang bewertet werden sollen, der dadurch entsteht, daß Maschinen auf Bedienung warten müssen und somit die Verwendungsmöglichkeit des Vorrats "Betriebsmittelkapazität" nicht voll ausgenutzt wird. Die aufgrund dieses Bewertungsprinzips ermittelten Kosten werden als "opportunity costs" oder "Opportunitätskosten" bezeichnet.[7]

Zur Opportunitätskostenminimierung ist folgendes kritisch zu bemerken:

> Das Prinzip einer positiven Bewertung mit Opportunitätskosten setzt voraus, daß das zu bewertende Gut knapp ist. Die Knappheit des Gutes erzwingt eine Auswahl unter den Verwendungsmöglichkeiten. Der Wert des Gutes wird danach festgesetzt, "...welcher Nutzen erzielt werden könnte, wenn diese Einheit (des Gutes, d. Verf.) der vorteilhaftesten aller nicht mehr berücksichtigten Verwendungsmöglichkeiten zugewiesen würde."[8] Mit anderen Worten: Steht das Gut für alle in Frage kommenden Verwendungsmöglichkeiten in ausreichender Menge zur Verfügung, so wird der Verbrauch des Gutes mit einem "Kosten-

1) HENN (85), S. 45
2) EDDISON-PENNYCUICK-RIVETT (44), S. 76
3) FABRYCKY-FORGERSEN (47), S. 357
4) ebenda; S. 321
5) MORSE (140), S. 5
6) Vgl. Handbuch des Industrial Engineering (132), S. 162
7) Vgl. BECKMANN (10), S. 30; BUHR (31), S. 687-708; HAX (83), S. 197-210; MICHEL (138), S. 82-93
8) HAX (83), S. 199

satz" kleiner oder gleich Null bewertet[1]. In den oben zitierten Meinungen wird deutlich, daß immer nur die Betriebsmittelkapazität als knappes Gut angesehen wird. Das muß aber keinesfalls so sein. Absatzrestriktionen können bewirken, daß vorhandene Betriebsmittelkapazitäten nicht voll ausgelastet werden können. Der Opportunitätskostensatz für unausgelastete Betriebsmittelkapazitäten ist dann aber Null oder negativ[2]. Auch kann es denkbar sein, daß nur Arbeitskräfte in begrenzter Menge zur Verfügung stehen. Es wäre dann sinnvoll, ihre Wartezeiten mit Opportunitätskostensätzen zu bewerten.

Die praktische Ermittlung von Opportunitätskostensätzen ist mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden, da diese im Gesamtzusammenhang der betrieblichen Planung gesehen und ermittelt werden müssen. So schreibt H. HAX: "Welchen Nutzen ein knappes Einsatzgut bei Zuweisung an die vorteilhafteste der nicht mehr berücksichtigten Verwendungsmöglichkeiten stiftet, hängt davon ab, welche Verwendungsmöglichkeiten zunächst einmal berücksichtigt werden und welche nicht."[3] Dies aber kann nur im Rahmen einer Gesamtplanung geschehen, so daß Opportunitätskostensätze sich nicht mehr als unabhängige Größen darstellen lassen. Da zudem innerhalb des Betriebes in der Regel mehrere knappe Güter zum Einsatz kommen, stößt die individuelle Berechnung dieser Sätze auf erhebliche mathematische Schwierigkeiten. Bei mehreren knappen Einsatzfaktoren müssen vielmehr simultane Berechnungsmethoden, wie etwa die mathematische Programmierung, zum Einsatz kommen[4].

Wie sich anhand des Preistheorems der linearen Programmierung[5] nachweisen läßt, gilt für die optimale Lösung eines linearen Programms:[6]

Hat das primale Maximumproblem eine endliche optimale Lösung, dann besitzt auch das duale Minimumproblem eine endliche optimale Lösung. Die Extremwerte der beiden linearen Zielfunktionen weisen den gleichen Wert auf, d. h.

---

1) Der "Kostensatz" ist negativ, wenn der Nicht-Verbrauch des Gutes "objektive Kosten" (Kosten der Kostenrechnung) verursacht. Zum Begriff der "objektiven Kosten" vgl. KILGER (104), S. 163.
2) Vgl. die vorhergehende Anmerkung.
3) HAX (83), S. 204
4) Vgl. HAX (83), S. 204 ff.
5) Vgl. hierzu KOOPMANS (111), S. 86; BECKMANN (10), S. 27 ff. und S. 62; DANTZIG (38), S. 292 ff.; HAX (82), S. 155 ff.
6) Vgl. KRELLE-KÜNZI (113), S. 42

$$\text{Max } Z(x) = \text{Min } Z(y)$$

mit anderen Worten: Wird im Primal ein Gewinnmaximum errechnet, so verteilt das entsprechende Dualproblem den Gewinn auf die gegebenen Faktormengen.

Unter bestimmten Voraussetzungen entspricht dem Preistheorem der linearen Programmierung das Theorem von Kuhn und Tucker[1] für den Fall der nichtlinearen Programmierung. Hieraus folgt für die praktische Anwendbarkeit der Opportunitätskostenminimierung: "Kostenbewertung nach dem Opportunitätskostenprinzip wäre nur dann von praktischem Nutzen, wenn man die Opportunitätskostensätze feststellen könnte, ohne sich der mathematischen Programmierung zu bedienen."[2] Und weiter:"Wenn man sich der mathematischen Programmierung bedient, findet man den optimalen Produktionsplan gleichzeitig mit den Opportunitätskosten, benötigt diese für die zu treffenden Dispositionen also gar nicht mehr."[3]

Zusammenfassend ist festzustellen: Opportunitätskostenminimierung führt bei Beachtung sämtlicher Verwendungsmöglichkeiten zum gleichen Ergebnis wie Gewinnmaximierung. Diese Ansicht teilen FABRYCKY und TORGERSEN. Bei der Erläuterung eines Zahlenbeispiels, in dem Brachzeiten bewertet wurden, schreiben sie: "In this example, the cost of waiting was taken to be $ 5 per unit per hour. If this is due to lost profit, resulting from unproductive units, the same solution may be obtained by maximizing profit."[4] Der Gewinnmaximierung ist der Vorzug zu geben, da Opportunitätskostensätze meist über den Umweg des Gewinnbegriffs interpretiert werden. Enthält das Planungsmodell die relevanten Daten aller Wahlmöglichkeiten, dann sind die Opportunitätskostensätze als Dualwerte inhärenter Bestandteil der Lösung.

22 Relevante Daten zur Bestimmung des Bedienungssystems bei Kostenminimierung

221 Grundsätze und Prämissen bei Kostenminimierung

1. Das Problem der Ermittlung optimaler Bedienungssysteme kann unter zwei Aspekten betrachtet werden, nämlich
   - vom Arbeiter her
   - von der bedienten Stelle her.

1) Vgl. KRELLE-KÜNZI (113), S. 59 ff
2) HAX (83), S. 207
3) HAX (83), S. 210
4) FABRYCKY-TORGERSEN (47), S. 355

Im überwiegenden Teil der Literatur wird das Problem vom Standpunkt des Arbeiters her gesehen. Es wird gefragt:"Wieviele Stellen oder Maschinen soll ein Arbeiter bedienen?"[1] Bei konstanter Arbeitskräfteanzahl wird also die Zahl der zu bedienenden Stellen oder Maschinen variiert. Insbesondere wurde immer der Fall betrachtet, daß e i n Arbeiter mehrere Stellen zu bedienen hat. Mehrstellige Gruppenarbeit wurde kaum in Betracht gezogen. Diese Betrachtungsweise resultiert wohl daher, daß als erste vornehmlich Arbeitswissenschaftler die Probleme bei Mehrstellenarbeit erforschten und infolgedessen der Mensch als Arbeitskraft im Mittelpunkt des Interesses stand. Da Betriebsmittel weniger flexibel einzusetzen sind als Arbeitskräfte, dürfte es jedoch zweckmäßiger sein, die Arbeitskräfteanzahl an eine gegebene Betriebsmittelkapazität anzupassen und nicht umgekehrt. Dieses Vorgehen hat den Vorteil, daß die mehrstellige Einzelarbeit als Spezialfall der mehrstelligen Gruppenarbeit angesehen werden kann. Auch wird mit einem solchen Planungsmodell Anschluß an eine Modellgruppe gefunden, die als "Verfahrenswahl auf der Basis konstanter Kapazitäten"[2] bezeichnet wird. Diese Ansicht teilt auch KILGER: "Verfahrensänderungen können...auch auf der Basis konstanter Kapazitäten erfolgen. So können z.B. im Fertigungsbereich das Bedienungssystem...variiert werden."[3] Die Bestimmung optimaler Bedienungssysteme wird im folgenden immer auf der Basis gegebener Betriebsmittelkapazitäten erfolgen. Wenn gelegentlich hiervon abgewichen wird, so geschieht dies aus didaktischen Gründen. In jedem Falle sei von Investitionsproblemen abstrahiert.

2. Wie bereits erwähnt ist Kostenminimierung nur dann sinnvoll, wenn sie für gegebene Auftragsmengen erfolgt. Die Minimierung einer Gesamtkostenfunktion hat den Vorteil, daß unlösbare Zurechnungsprobleme umgangen werden. Brach- und Wartezeiten werden als globale Größen bewertet und gehen als eigene Komponente in die Zielfunktion ein. Stückbezogene Brach- und Wartezeiten sind bei heterogener Auftragszusammensetzung nicht zu ermitteln. Die gegebenen Auftragsmengen gehen als Mengenrestriktionen in das Planungsmodell ein.

---

1) Diese Frage wurde unseres Wissens zum ersten Mal von KÄSTNER (97), S. 662-664, gestellt. Vgl. auch BERNSTEIN (19); DENHOLM(41), S. 107, 108, 109, 132; FRANZ (61), S. 108-110
2) Vgl. KILGER (105), S. 156-191
3) KILGER (104), S. 135

3. Ein überaus wichtiger Grundsatz, der bei der Aufstellung von Planungsmodellen beachtet werden sollte, besteht darin, nur die relevanten Daten eines Entscheidungsproblems zu berücksichtigen. Für Kostenminimierungsprobleme ist diese Forderung als "der Grundsatz von den relevanten Kosten" in die Literatur eingegangen[1]. "Unter den relevanten Kosten eines Entscheidungsproblems versteht man diejenigen Kosten, deren Entstehung von den Entscheidungsparametern dieses Problems funktional abhängig sind."[2] Relevante Kosten können unseres Erachtens nur objektive Kosten, also Kosten der Kostenrechnung, sein[3]. Opportunitätskosten können nur dann relevant werden, wenn es sich um Entscheidungen in Engpaßsituationen handelt; in diesen Situationen jedoch auch nur dann, wenn nicht alle in Frage kommenden Verwendungsmöglichkeiten eines knappen Gutes im Planungsmodell berücksichtigt wurden. Bei einem Planungsmodell, das alle Verwendungsmöglichkeiten in Betracht zieht, ist eine Einbeziehung von Opportunitätskosten unnötig. Eine geeignete Modellformulierung erübrigt somit eine Einbeziehung von Opportunitätskosten.

222 Die Ermittlung der für Bedienungssysteme relevanten Kosten

1. Zunächst erhebt sich die Frage, welche objektiven Kostenkategorien des Systems der Kostenrechnung zur Lösung kostenoptimaler Bedienungssysteme relevant sein können. Da die Bestimmung optimaler Bedienungssysteme auf der Basis gegebener Kapazitäten erfolgen soll, handelt es sich um kurzfristige Entscheidungen im Sinne von A. MARSHALL[4]. Hieraus folgt: "Bei kurzfristigen Entscheidungen sind die kapazitätsdeterminierten fixen Kosten ex definitione unverändert, d. h. für alle Entscheidungsmöglichkeiten gleich hoch und daher für das Entscheidungskalkül nicht relevant."[5] Die Einbeziehung fixer Kostenbestandteile in Kostensätze, die bei der Bestimmung optimaler Bedienungssysteme Verwendung finden sollen, ist daher überflüssig. Sie birgt zudem die Gefahr falscher Anwendung. Wir können daher weder E. WEDEKIND[6] noch H. WEDEKIND[7] zustimmen, die in die diversen Kostensätze Kostenarten wie "Raumkosten", "kalkulatorische Abschreibungen", "Verzinsung" und

1) Vgl. KILGER (104). S. 160 ff. und die dort angegebene Literatur.
2) KILGER (105), S. 162
3) Ob und inwieweit 'kalkulatorische Zinsen' objektive Kosten sind, ist noch ein strittiges Problem.
4) Vgl. MARSHALL (129), S. 314 f.
5) KILGER (104), S. 164 f.
6) WEDEKIND (205), S. 20 f.
7) WEDEKIND (211), S. 34 f.

"Versicherung" einbeziehen. In fast allen Betrieben stellen diese Kostenarten fixe Kosten dar. Im einzelnen wollen wir auf die hinlänglich bekannte Problematik der Einbeziehung fixer Kosten in Kalkulationssätze nicht mehr eingehen und verweisen auf die Fachliteratur[1]. Es bleibt festzustellen, daß die auf Vollkostenrechnung basierenden "optimalen" Bedienungssysteme nicht optimal sein können. Ein typisches Beispiel, wie durch Einbeziehung fixer Kosten in Kalkulationssätze Fehlentscheidungen getroffen werden, zeigt der Aufsatz von H. GOEBEL[2]. Wir sind mit KILGER der Ansicht, daß "...Verfahrenswechsel bei gegebenen Kapazitäten dagegen nur die variablen Kosten" beeinflussen[3].

2. Nachdem festgestellt wurde, daß nur v a r i a b l e K o s t e n zur Bestimmung optimaler Bedienungssysteme relevant sein können, müssen exakte Maßgrößen der Kostenverursachung (Bezugsgrößen) gefunden werden. Mit ihrer Hilfe soll der Einfluß veränderter Bedienungssysteme meßbar gemacht werden.
Zur Berücksichtigung des Einflusses wechselnder Bedienungsverhältnisse hat es sich als sinnvoll erwiesen, die Bezugsgrößen "Arbeiterzeit" und "Betriebsmittelzeit" nebeneinander zu verwenden, da es arbeiterzeitabhängige und betriebsmittelzeitabhängige Kosten gibt. Auf diesen Tatbestand hat bereits RUMMEL hingewiesen: "Man kommt hier mit einem Soll-Wert der Platzkosten für jeden Arbeitsplatz nicht aus und muß unterscheiden zwischen den Maßgrößen der Maschinenzeit und der Arbeiterzeit."[4] Auch GELLERT schreibt: "...denn das Wesensmerkmal der Mehrmaschinenbedienung aus kostenrechnerischer Schau ist gerade mit dem Auseinanderklaffen von Maschinenzeit und Fertigungszeit...charakterisiert."[5]

2221 Die Kosten des Faktors "menschliche Arbeit"

1. Grundlage für die Entlohnung von Arbeitskräften bilden in der Regel die Arbeitszeiten. Bei der Analyse der Kosten des Faktors "Arbeit" muß zwischen verschiedenen Lohnformen unterschieden werden:

1) Vgl. KILGER (104), S. 86 ff. und die dort angegebene Literatur.
2) GOEBEL (74), S. 233-236; vgl. auch SEIB (180), S. 183-185.
3) KILGER (104), S. 135
4) RUMMEL (167), S. 161; vgl. ferner KILGER (104), S. 339 f.; WEDEKIND (210), S. 144
5) GELLERT (68), S. 15

- Zeitlohn
- Akkordlohn
- Prämienlohn

Bei der folgenden Analyse ist zu beachten, daß nicht die effektiv zur Auszahlung gelangenden Löhne betrachtet werden, sondern daß die Lohnkosten, die dem Betrieb erwachsen, im Mittelpunkt des Interesses stehen.

2. Grundlage der Entlohnung für Arbeiter, die im Z e i t l o h n eingesetzt werden, bildet die Arbeitszeit. Beim Arbeiter wird in der Regel als Maßstab die Arbeitsstunde oder die Fertigungsminute verwendet. Die gesamten Lohnkosten des Betriebes (K_L^A) sind das Produkt aus
der von A (homogenen) Arbeitern geleisteten effektiven Arbeitszeit $A \cdot T_A$ und dem
Lohnsatz 1

$$K_L^A = A \cdot T_A \cdot 1 \tag{2.4}$$

Berücksichtigt man die Aufspaltung der Arbeiterzeit in Tätigkeitszeit (T_t) und Wartezeit (T_w), so geht (2.4) über in

$$K_L^A = A \cdot (T_t + T_w) \cdot 1 \tag{2.5}$$

Der Lohnsatz pro Arbeitszeiteinheit setzt sich aus außerbetrieblichen und innerbetrieblichen Lohnbestandteilen zusammen. Im einzelnen kann die Zusammensetzung des Lohnsatzes wie folgt dargestellt werden.[1)]

	Tarifsatz (Bruttolohnsatz des Arbeiters pro Arbeitszeiteinheit)	außerbetriebliche Lohnbestandteile
+	Gesetzliche Sozialabgaben	
+	Gesetzliche Soziallohnrate	
=	Tarifsatz zuzügl. gesetzl. Sozialaufwand	
+	Freiwillige Sozialabgaben, primär	innerbetriebliche Lohnbestandteile
+	Freiwillige Sozialabgaben, sekundär	
=	Gesamter Lohnsatz pro Arbeitszeiteinheit	

1) KILGER (104), S. 172 ff.; vgl. GELLERT (68), S. 15

Zu den g e s e t z l i c h e n S o z i a l a b g a b e n zählen die von der Unternehmung zu tragenden Anteile der Beiträge zu den Sozialversicherungen (Angestellten-, Invaliden-, Unfall- und Arbeitslosenversicherung[1]) und die Lohnfortzahlung für Arbeitnehmer im Krankheitsfall.
Neben der reinen Arbeitszeit müssen in vielen Fällen Urlaubs- und Feiertagslöhne, sowie Schlechtwettergeld gezahlt werden. Diese Lohnbestandteile werden in der g e s e t z l i c h e n S o z i a l l o h n r a t e zusammengefaßt.
Zu den primären f r e i w i l l i g e n S o z i a l a b g a b e n zählen z. B. Ausbildungsbeihilfen, Weihnachtsgratifikationen, Trennungsgelder u. ä. Sie können direkt der Bruttolohnsumme zugeschlagen werden.

Die Kosten betrieblicher sozialer Einrichtungen, wie z. B. Kantine, Duschanlagen, Werkswohnungen u. ä. können nur über zwischengeschaltete Hilfskostenstellen auf die Bruttolöhne verrechnet werden. Aus diesem Grund spricht man hier von sekundären freiwilligen Sozialabgaben. Ein großer Teil dieser Kosten ist aber fix und daher für die Bestimmung optimaler Bedienungssysteme nicht relevant.

Da beim Zeitlohn die reine Arbeitszeit vergütet wird, entspricht dieser nicht dem Prinzip einer leistungsgerechten Entlohnung. Hierin liegen seine Nachteile. Der Betrieb trägt allein das Risiko schlechter Arbeitsleistungen. Für den Arbeitnehmer bietet der Zeitlohn keinen Anreiz zur Leistungssteigerung. Infolgedessen wird der Zeitlohn vorwiegend dort angewendet, wo ein Leistungslohn aus wirtschaftlichen Gründen nicht angebracht erscheint; aber auch dort, wo entweder die Arbeitsleistung nicht meßbar ist oder der Arbeitende keinen Einfluß auf die Arbeitsintensität hat.

3. Grundlage der Entlohnung der Arbeiter, die im A k k o r d l o h n eingesetzt werden, bildet die geleistete Arbeitszeit. (Erarbeitete Akkordzeit). Voraussetzungen einer Akkordentlohnung sind die Vorgabefähigkeit und die Vorgabereife einer Arbeit[2]. Vorgabe- oder akkordfähig ist eine Arbeit, deren Arbeitsablauf im voraus bekannt und deren Ergebnisse mengenmäßig genau erfaßbar sind. Vorgabe- oder akkordreif wird eine vorgabefähige Arbeit dadurch, daß ein geregelter Arbeitsablauf durchführbar ist (störungsfreier Arbeitsablauf) und der

1) Die Arbeitslosenversicherung trägt der Arbeitgeber ganz.
2) Vgl. SCHÖNEFELD (179), S. 76 und die dort angegebene Literatur.

Arbeiter durch seinen Leistungsgrad Einfluß auf das Arbeitsergebnis nehmen kann. Es muß geprüft werden, ob diese Voraussetzungen bei Mehrstellenarbeit erfüllt sind.

Nehmen wir an, die genannten Voraussetzungen sind erfüllt, dann lassen sich Planarbeitszeiten (Vorgabezeiten) pro Arbeitsgang und Produkteinheit vorgeben[1]. Wird diese Vorgabezeit vom Arbeitenden unterschritten, so erhöht sich der Verdienst des Arbeiters, da immer die Vorgabezeit vergütet wird. Die einem Betrieb entstehenden Lohnkosten K_L einer Arbeitskraft, die während einer Periode T x homogene Produkte bearbeitet hat, betragen

(2.6) $$K_L = \underbrace{x \cdot t}_{\text{Erarbeitete Akkordminute}} \cdot l^* \quad \text{Minutenfaktor}$$ [2]

t Vorgabezeit bei $\lambda = 100$ % (Min./Stück)

l^* Minutenfaktor[3] (DM/Min.)

In (2.6) läßt sich die Produktmenge durch den Ausdruck

(2.7) $$\frac{T \cdot \lambda}{t} \qquad \text{für} \quad \lambda \geq 100$$

ersetzen. Man erhält dann:

(2.8) $$K_L = T \cdot \lambda \cdot l^* \qquad \text{für} \quad \lambda \geq 100$$

Aus (2.8) ist ersichtlich, daß beim Akkordlohn eine Proportionalität zwischen Lohnhöhe und menschlichem Leistungsgrad besteht, d. h. es wird die reine Arbeitsleistung des Arbeiters vergütet. Das Risiko schlechter Arbeitsleistung liegt beim Arbeiter selbst. Die Lohnkosten pro Stück sind konstant; die gesamten Lohnkosten sind somit proportional zur Ausbringung. Die Nachteile eines Akkordlohnsystems liegen eventuell in einer übersteigerten Arbeitsintensität mit negativen Auswirkunden auf die Produktqualität.

---

1) Die Vorgabezeit entspricht der für die Ausführung der Arbeit aufzuwendenden Arbeitszeit bei normalem Leistungsgrad ($\lambda = 100$ %)

2) Die Gleichung (2.6) muß noch um die außerbetrieblichen Lohnbestandteile und die freiwilligen Sozialabgaben ergänzt werden.

3) Den Minutenfaktor erhält man durch Division des Akkordrichtsatzes durch 60 (Min./h). Der Akkordrichtsatz ist der Lohnsatz pro Arbeitsstunde bei Normalleistung. Er setzt sich zusammen aus:
   - dem tariflich garantierten Mindestlohn
   - dem Akkordzuschlag.

Hat ein Arbeiter während der Periode T mehrere verschiedene Produktarten x_i (i = 1, ..., n) bearbeitet, so geht (2.6) über in

$$K_L = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot t_i \cdot l^* \qquad (2.9)$$

Es soll nun geprüft werden, ob die Voraussetzungen einer Akkordentlohnung bei Mehrstellenarbeit erfüllt sind.
Im 1. Kapitel wurde bei der Analyse der Arbeiterzeit gezeigt, daß bei den Weg- und Wartezeiten meist unlösbare Zurechnungsprobleme auftreten. Aus diesem Grunde können diese Zeiten nicht in die Vorgabezeiten einbezogen werden. Hinzu kommt, daß Weg- und Wartezeiten bei Mehrstellenarbeit direkt mit der eingesetzten Arbeitskräfteanzahl variieren, deren Optimum ja erst bestimmt werden soll. Die genannten Schwierigkeiten ließen sich praktisch durch Gewährung von Zusatzlöhnen ausschalten. Zusatzlöhne werden immer dann gezahlt, wenn die Annahme leistungsgerechter Vorgabezeiten nicht erfüllt ist.
Die Voraussetzungen einer Akkordentlohnung bei Mehrstellenarbeit erscheinen jedoch aus einem zweiten wichtigeren Grund nicht erfüllt zu sein. Wie gezeigt wurde, besteht eine wesentliche Voraussetzung einer Akkordentlohnung darin, daß zumindest eine weitgehende Proportionalität zwischen Ausbringung und menschlichem Leistungsgrad festgestellt werden kann. Diese Prämisse ist jedoch nur dann erfüllt, wenn die Vorgabezeit eines Erzeugnisses zum größten Teil aus vom Arbeiter beeinflußbaren Zeiten besteht. Bei Mehrstellenarbeit enthält jedoch die Vorgabezeit eines Arbeitsgegenstandes sehr oft vom Arbeiter unbeeinflußbare Zeiten[1]. Solche unbeeinflußbaren Zeiten können sein: arbeitsablaufbedingte Wartezeiten des Arbeiters (insbesondere bei stochastischer Mehrstellenarbeit), unbeeinflußbare Überwachungszeiten, aber auch Verrichtungszeiten bei produzierendem Betriebsmittel. Allgemein gilt: Je höher der Anteil der unbeeinflußbaren Zeiten ist, desto geringer schlägt sich ein erhöhter Leistungsgrad des Arbeiters im Lohn nieder. Von einer leistungsproportionalen Entlohnung kann daher dann bei Mehrstellenarbeit nicht mehr die Rede sein.

Betrachten wir hierzu die Abbildung 27, in der der Einfluß des Leistungsgrades auf die Ausbringung bei unterschiedlichem Verhältnis von beeinflußbaren Zeiten dargestellt ist.[2]

1) Vgl. SCHÖNEFELD (179), S. 99
2) Die der Abbildung 27 zugrundeliegenden Zahlenwerte wurden einer entsprechenden Tabelle bei RIES (163), S. 64, entnommen.

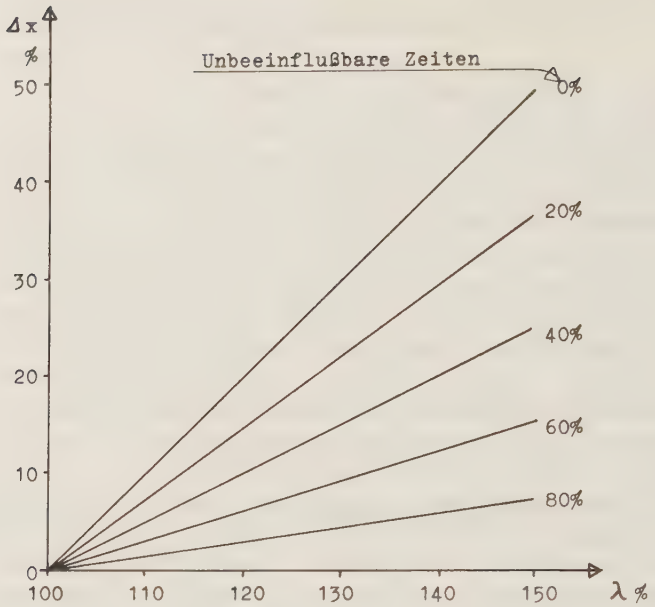


Abb.27: Der Einfluß des Leistungsgrades (λ) auf die Steigerung der Ausbringung (Δx) bei unterschiedlichem Verhältnis von beeinflußbaren und unbeeinflußbaren Zeiten

Aus ihr ist ersichtlich, daß der Arbeiter mit zunehmendem Leistungsgrad keine entsprechende Steigerung seines Verdienstes erreichen kann. Infolgedessen sinkt auch (bei reinem Akkordlohn) der Lohnanreiz mit zunehmendem Anteil der unbeeinflußbaren Zeiten.
Bei Mehrstellenarbeit kann der Leistungsgrad des Arbeiters nur dann durch die während einer bestimmten Periode T gefertigte mengenmäßige Ausbringung gemessen werden, wenn das Verhältnis der beeinflußbaren und unbeeinflußbaren Zeiten bekannt ist. Unter dieser Voraussetzung ist jedoch eine r e i n e Akkordentlohnung nicht mehr sinnvoll.

Dementsprechend werden Arbeiten mit mittlerem oder niedrigem Anteil an beeinflußbaren Zeiten nicht mehr als akkordreif angesehen[1]. Arbei-

1) Vgl. SCHÖNEFELD (179), S. 71, 101

ten mit unbeeinflußbaren Teilzeiten sollen, so wird vorgeschlagen, durch Zeit-Ausgleichszuschläge (Verdienstzuschläge) entlohnt werden[1]. Zu diesen Verfahren ist jedoch folgendes kritisch zu bemerken:[2]

1. Über die Höhe der Zuschläge lassen sich keine wissenschaftlich exakten Angaben machen. Alle Vorschläge laufen daraufhin hinaus, daß der Zuschlag um so größer sein müsse, je größer der Anteil der unbeeinflußbaren Zeiten ist. Aus diesem Grund wäre es für einen Arbeiter sinnvoll, nach Zuteilung von solchen Arbeiten zu streben, die möglichst hohe unbeeinflußbare Zeiten enthalten.

2. Da sich der Zeit-Ausgleichszuschlag neben der Höhe der unbeeinflußbaren Zeiten nach der realisierten Leistung während der beeinflußbaren Zeit richtet, wird ein Akkordarbeiter mit voll beeinflußbaren Zeiten gegenüber einem Arbeiter mit nicht voll beeinflußbaren Zeiten benachteiligt, da dieser während der gesamten Vorgabezeit seinen Leistungsgrad entfalten muß, während jener nur während der beeinflußbaren Zeiten mit erhöhter Intensität zu arbeiten braucht

3. Bei einem hohen Anteil unbeeinflußbarer Zeiten wird sich in der Regel auch der Schwierigkeitsgrad im Sinne der Arbeitsbewertung ändern, so daß für Arbeiten mit nicht voll beeinflußbaren Zeiten ein niedrigerer Akkordsatz zu vergüten wäre.

Unsere Kritik legt die Forderung nahe, Zeit-Ausgleichszuschläge auf unbeeinflußbare Zeiten ganz abzulehnen. Hierfür sprechen folgende Gründe:[3]

1. Einem Zeit-Ausgleichszuschlag steht keine echte (mengenmäßige) Mehrleistung gegenüber.

2. Wenn die Struktur der Mehrstellenarbeit den ständigen Einsatz der menschlichen Arbeitskraft nicht erfordert, so kann es nicht "gerecht"[4] sein, Arbeiter, die diese Arbeiten ausführen, genauso zu entlohnen, wie reine Akkordarbeiter.

---

1) Vgl. BÖHRS (25), S. 1-11; HALTY (81), S. 457-460; KOHLMANN (110), S. 165-169; SCHEIB (175), S. 150-156; TIMME (194), S. 100-102
2) Vgl. auch Bundesvereinigung der Deutschen Arbeitgeberverbände: "Unbeeinflußbare" Zeiten. - Leistung und Lohn. Bergisch Gladbach 1960, Nr. 3, S. 11 ff.
3) Vgl. BÖHRS (26), S. 11-14; BÖHRS (27), S. 140
4) "Gerecht" im Sinne einer Gleichbehandlung aller Arbeiter.

3. Wird ein Arbeiter bei Mehrstellenarbeit im Akkord entlohnt, so werden die unbeeinflußbaren Zeiten mindestens mit dem Akkordrichtsatz entlohnt, der in der Regel 15 - 20 % über dem Grundlohn liegt. Die Vergütung solcher Zeiten mit dem Akkordrichtsatz ist also im Vergleich zum Zeitlöhner keinesfalls unzulänglich.

4. Ein Zeit-Ausgleichszuschlag wird auch solchen Arbeitern gezahlt, die während der beeinflußbaren Zeit die Normalleistung nur annähernd erreichen. Diese Arbeiter würden also den Teil ihrer Arbeitszeit, der mit unbeeinflußbarer Zeit ausgefüllt ist, höher vergütet erhalten, als den beeinflußbaren Teil der Arbeitszeit. Das jedoch ist unsinnig.

Wir stimmen mit MAUCHER überein, der schreibt: "Die Akkordentlohnung von Arbeiten mit hohem Anteil an > unbeeinflußbaren Zeiten < ist nur arbeitsrechtlich eine solche. De facto haben wir hier einen Mischfall von Akkord- und Zeitlohn vorliegen, insofern nämlich die konstante Entlohnung der > unbeeinflußbaren Zeiten < mit dem Akkordrichtsatz auf eine Zeitlohnsituation hinausläuft... Warum darf es nicht auch Leute geben, die im Zeitlohn und im Leistungslohn arbeiten?"[1] Aus genannten Gründen ist anstelle einer Akkordentlohnung in der Praxis heute vielfach eine Prämienentlohnung getreten. Wird dennoch an einer Akkordentlohnung festgehalten, so ist zu fordern, daß nur die beeinflußbaren Zeiten im Akkord entlohnt werden. Unbeeinflußbare Zeiten sind dagegen nur mit dem Akkordrichtsatz zu vergüten. Diese Meinung vertritt auch BÖHRS: "Es läßt sich also nichts daran ändern, wenn bei Akkordentlohnung die unbeeinflußbaren Zeiten unabhängig vom Leistungsgrad, der während der beeinflußbaren Zeiten erreicht wird, mit dem für Normal- bzw. Durchschnittsleistung gültigen Satz entlohnt werden. Dabei bleibt die Bedingung der Akkordentlohnung erfüllt, daß der Verdienst des Akkordarbeiters zur Sachleistung proportional verläuft."[2]

Die Anwendung des Akkordlohnes bei stochastischer Mehrstellenarbeit bedarf noch einer Erörterung. Die Voraussetzung der Vorgabefähigkeit ist hier unseres Erachtens nicht erfüllt, da der Arbeitsablauf im voraus nicht bekannt ist, zumindest nur mit statistischen Wahrscheinlichkeiten festgelegt werden kann. Auch die Voraussetzung eines störungsfreien Arbeitsablaufes ist nicht gegeben. Zeichnet sich die stochasti-

1) MAUCHER (131), S. 36
2) BÖHRS (27), S. 141

sche Mehrstellenarbeit doch gerade dadurch aus, daß in zufälligen Zeitpunkten Störungen im Arbeitsablauf auftreten können, so daß die Laufzeit eines Aggregates eine zufällige Veränderliche ist. Da die Bedienungszeiten bei stochastischer Mehrstellenarbeit meist auch einer Wahrscheinlichkeitsverteilung unterliegen, lassen sich keine Vorgabezeiten ermitteln. Zudem ist der Anteil unbeeinflußbarer Zeiten bei stochastischer Mehrstellenarbeit meist hoch. Aus genannten Gründen dürfte eine Akkordentlohnung - selbst wie oben modifiziert - bei stochastischer Mehrstellenarbeit gänzlich entfallen. Hier erscheint - sofern nicht im Zeitlohn gearbeitet wird - eine Prämienentlohnung angebracht.

4. Neben einer Entlohnung im Zeitlohn oder im Akkordlohn besteht grundsätzlich die Möglichkeit, Arbeitskräfte im P r ä m i e n l o h n zu entlohnen. Hierbei tritt neben den Grundlohn, der meist ein Zeitlohn ist, eine zusätzliche Vergütung (Prämie), die nach einer gewissen Mehrleistung berechnet wird. Das Mengengerüst für die Prämienzahlung bildet die Prämienbemessungsgrundlage.

Die Konstruktion eines Planungsmodells auf der Grundlage einer Prämienentlohnung setzt eine Kenntnis der Prämienbemessungsgrundlage voraus. Da jedoch die Vielgestaltigkeit der Prämienbemessungsgrundlagen infolge betriebsindividueller Regelungen sehr groß ist, läßt sich hier kein allgemeingültiges Schema angeben.

In Betrieben mit Mehrstellenarbeit wird oft der Nutzungszeitgrad als Prämienbemessungsgrundlage gewählt. "Bei hohem Anteil unbeeinflußbarer Zeiten an der Schichtzeit empfiehlt sich daher die Anwendung von Prämienentlohnung unter Zugrundelegung des erzielten Nutzungsgrades der Maschinen."[1] Die Verwendung des Nutzungszeitgrades erscheint uns jedoch nur dann sinnvoll, wenn folgende Voraussetzungen erfüllt sind.

(a) Die Betriebsmittelkapazität ist Engpaß.

(b) Der Arbeitende hat einen Einfluß auf die Betriebsmittel-Brachzeiten. Dies kann dadurch erfolgen, daß er durch erhöhte Arbeitsintensität die Betriebsmittel-Nebenzeiten verkürzt.

Ist Voraussetzung (a) erfüllt, dann ist es sinnvoll, die arbeitsablaufbedingten Brachzeiten zu minimieren. Dies kann aber nur dann geschehen, wenn auch die Voraussetzung (b) erfüllt ist.

1) BÖHRS (28), S. 104

Bei der Nutzzeitgradmaximierung ist jedoch zu beachten, daß die Arbeiter durch willkürliche Verlängerung der Tätigkeitszeiten die Brachzeiten "verkürzen" und damit die Nutzungszeitgrade ungerechtfertigt erhöhen können. Das müßte durch eine entsprechende Gestaltung des Arbeitsablaufes verhindert werden.

2222 Die Kosten des Faktors "Betriebsmittel"

Als Maßgröße der variablen Kosten, die durch die Betriebsmittel verursacht werden, wird bei Mehrstellenarbeit meist die "Maschinenstunde" verwendet. Lediglich in wenigen Industriezweigen hat es sich als zweckmäßig erwiesen, hiervon abzuweichen, so z. B. in Webereien, wo als Maßgröße für die von der Maschinenzeit abhängigen Kosten die Bezugsgröße "10^3 Schuß" verwendet wird.
Für die Belange der Mehrstellenarbeit erscheint es sinnvoll, die Bezugsgröße "Maschinenstunde" - oder allgemein "Betriebsmittelzeit" - als Maßstab für die Kostenverrechnung in ihre Bestandteile: Hauptzeit, Nebenzeit und Brachzeit zu zerlegen und die Kosten in Abhängigkeit dieser Teilzeiten zu ermitteln.

In den Minutensatz[1] der Betriebsmittelhauptzeit, der mit d_h bezeichnet sei, können folgende (variable) Kostenarten eingehen:[2]

Für die an einem Arbeitsplatz installierten Betriebsmittel fallen in der Regel Betriebsstoffkosten an. Hierzu zählen insbesondere Schmieröle und Fette, die zum Abschmieren, als Bohr- und Schneidöle, als Kühlmittel für hydraulische Zwecke u. ä. benötigt werden. Als weitere wichtige Betriebsstoffkostenart sind Kraftstoffe, wie Benzine, Dieselöle u. ä., zu nennen. Schließlich fallen unter Betriebsstoffkosten die Kosten für Reinigungsstoffe, die sich zum Teil proportional zur Bezugsgröße verhalten.

Als weitere Kostenart wären Energiekosten zu nennen, zu denen man üblicherweise die Kosten für elektrische Energie, Gas, Druckluft, Wasser und Dampf zählt.

Auch sind Werkzeugkosten in den meisten Betrieben proportional anzusetzen. Hierzu gehören insbesondere Maschinenwerkzeuge, wie Dreh- und Hobelstähle, Schleifscheiben, Fräser, Bohrer, Scheren,

1) Entsteht durch Division des Stundensatzes durch 60 (Min./h)
2) Vgl. Rechnen mit Maschinenstundensätzen (152)

Messer, Sägen u.ä., Hand- und Meßwerkzeuge.

Eine nicht zu unterschätzende Kostenart stellen die kalkulatorischen Abschreibungen dar, die auf Gebrauchsverschleiß zurückzuführen sind. Sie sind proportional zur Bezugsgröße "Hauptzeit". Lediglich die kalkulatorischen Abschreibungen, die auf Zeitverschleiß zurückzuführen sind, sind fix und daher irrelevant.

Auch ist ein Teil der Instandhaltungs- und Reparaturkosten den proportionalen Kosten zuzurechnen, da sie vorwiegend durch den Gebrauchsverschleiß von Betriebsmitteln verursacht werden. Sie umfassen Reparaturmaterial und Ersatzteile sowie die Instandhaltungs- und Reparaturleistungen eigener, sowie fremder Betriebe.

Überdies enthält der Hauptzeit-Stundensatz in der Regel kalkulatorische Leitungskosten und innerbetriebliche kalkulatorische Transportkosten. Zu den kalkulatorischen Leitungskosten zählen die Kosten der Abteilung "Technische Betriebsleitung", "Arbeitsvorbereitung", "Terminbüro" u.ä., sofern sie in einem eindeutigen proportionalen Zusammenhang zur Ausbringung stehen.

Die innerbetrieblichen Transportabteilungen haben die Beförderung von Werkstoffen, Halb- und Fertigfabrikaten zur Aufgabe. Die Kosten der Transporteinrichtungen, wie Krananlagen, Lastenaufzüge, Förderbänder, Gabelstapler u. dgl. faßt man zu den innerbetrieblichen kalkulatorischen Transportkosten zusammen.

Bei der Beschreibung der in den Hauptzeit-Minutensatz eingehenden Kostenarten haben wir bewußt auf eine Unterscheidung in primäre und sekundäre Kostenarten verzichtet. Auch auf die Ermittlung bzw. Planung dieser Kostenarten sei hier nicht eingegangen.[1)]

In den Minutensatz der Betriebsmittel-Nebenzeit, der mit d_n bezeichnet sei, gehen normalerweise nur die Kostenarten Betriebsstoffkosten und Energiekosten ein. Man kann nämlich davon ausgehen, daß die einzelnen Aggregate auch in der Zeit, in der das Betriebsmittel nicht produziert, im "Leerlauf" stehen und dabei Betriebsstoffe und Energie verbrauchen.

1) Vgl. hierzu KILGER (104), S. 388 ff.

In ähnlicher Weise kann dies auch für die Betriebsmittel-Brachzeit angenommen werden, so daß die Brachzeiten ebenfalls mit dem Minutensatz für die Nebenzeit zu bewerten wären. So schreibt DAMS: "Endet der technologische Prozeß dagegen selbsttätig, jedoch ohne Ausschaltung der Maschine, so entsteht Leerlauf und damit unnützer Energieverbrauch."[1] Schalten sich dagegen die Maschinen selbsttätig aus, so ist die Betriebsmittel-Brachzeit mit Null zu bewerten.

Die durch die Betriebsmittelzeit verursachten objektiven Kosten lassen sich formelmäßig wie folgt darstellen:

(2.10) $$K_M = T_h \cdot d_h + T_n \cdot d_n + T_{Ba} \cdot d_n$$

K_M Betriebsmittelkosten während der Betriebsmittelzeit
$T_M = T_h + T_n + T_{Ba}$

Setzt man

(2.11) $$T_h \cdot d_h + T_n \cdot d_n = T_N \cdot d_N$$

so erhält man

(2.12) $$K_M = T_N \cdot d_N + T_{Ba} \cdot d_n$$

Der Minutensatz der Betriebsmittel-Nutzungszeit errechnet sich als gewogenes Mittel der Kosten der Hauptzeit und der Kosten der Nebenzeit, also

(2.13) $$d_N = \frac{T_h \cdot d_h + T_n \cdot d_n}{T_h + T_n}$$

2223 Sonstige relevante Kosten

Bisher wurden nur Kosten besprochen, die direkt von der Wahl des Bedienungssystems beeinflußt werden, Alle diese im Kapitel 2221 und im Kapitel 2222 aufgezählten Kosten, wollen wir als r e l e v a n t e K o s t e n 1. G r a d e s bezeichnen. Die relevanten Kosten 1. Grades sind sowohl in Kostenminimierungs- als auch in Gewinnmaximierungsmodellen zu berücksichtigen.

1) DAMS (37), S. 30

Zu den r e l e v a n t e n K o s t e n 2. G r a d e s wollen wir alle Kosten zählen, die von den Ausbringungsmengen abhängen, also alle Kosten, die direkt mengenproportional sind und nicht von der Wahl des Bedienungssystems beeinflußt werden[1]. Hieraus folgt, daß relevante Kosten 2. Grades für Kostenminimierungsmodelle unbedeutend sind, da hier die zu produzierenden Mengen festliegen. Die relevanten Kosten 2. Grades haben auf die Lage des Kostenoptimums keinen Einfluß. Dagegen sind sie in Gewinnmaximierungsmodelle in jedem Falle einzubeziehen. Hier liegen die Produktmengen ex ante noch nicht fest. Die Kosten bestimmen daher die Gewinnhöhe und damit die Lage des Optimums.

Alle Kosten, die üblicherweise in die proportionalen Selbstkosten der betrieblichen Produkte eingehen, sind - soweit sie noch nicht in den relevanten Kosten 1. Grades berücksichtigt wurden - in die relevanten Kosten 2. Grades einzubeziehen. Hierzu zählen in unserem Fall Einzelmaterial- und Materialgemeinkosten, also die gesamten M a t e r i a l k o s t e n, alle nicht durch das Bedienungssystem beeinflußten F e r t i g u n g s k o s t e n, die Sondereinzelkosten der Fertigung, die V e r w a l t u n g s - und V e r t r i e b s k o s t e n, sowie die Sondereinzelkosten des Vertriebs[2].

23 Relvante Daten zur Bestimmung des Bedienungssystems bei Gewinnmaximierung

231 Bestimmungsfaktoren des Absatzvolumens

Einleitend hatten wir festgestellt, daß in marktwirtschaftlich orientierten Wirtschaftssystemen die Gewinnmaximierung als wirtschaftlich sinnvolle Zielsetzung angesehen werden kann. Aus der Grundgleichung des Betriebserfolgs

Gewinn = Umsatz[3] ./. Kosten der abgesetzten Erzeugnisse

oder

$$(2.14) \qquad G = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot k_i - R$$

1) Eine Unterscheidung der Kosten in einen von der Bedienungsart unabhängigen und abhängigen Bestandteil trifft auch GELLERT (68), S.15.
2) Vgl. auch GELLERT (68), S. 15
3) Die Begriffe "Umsatz" und "Erlös" benutzen wir synonym.

Kurzzeichen:

x_i	Produktmenge der Produktart i (i = 1, ..., n)
p_i	Marktpreis der Produktart i
k_i	Proportionale Stückkosten der Produktart i
R	Sonstige nicht auf die Produkteinheit zurechenbare relevante Kosten

ist ersichtlich, daß der Erfolg neben den Daten der Produktionssphäre, die vornehmlich in den Kosten ihren Niederschlag finden, durch Faktoren bestimmt wird, die aus dem Außenbereich der Unternehmung - dem Markt - stammen[1]. Neben den Kosten hängt somit der Gewinn von den Absatzmengen und den Verkaufspreisen der betrieblichen Erzeugnisse ab. Das Volumen der Absatzmenge wird in erster Linie durch die G e s a m t n a c h f r a g e nach den von einer Unternehmung angebotenen Produkten bestimmt. Die Gesamtnachfrage stellt die Absatzhöchstgrenze für eine bestimmte Produktart dar. Sie verteilt sich nach Maßgabe der auf einem Markt bestehenden Konkurrenzbeziehungen auf die einzelnen Anbieter. Ob ein einzelner Anbieter den Verkaufspreis als Aktionsparameter benutzen kann oder nicht, hängt ebenfalls von den Marktbedingungen ab. Die Gegebenheiten und Bedingungen, die auf einem Markt herrschen, haben ihren Niederschlag in der Lehre von den M a r k t f o r m e n und der daraus resultierenden Verhaltensweisen gefunden[2]. Insbesondere hat sich ALBERS bemüht, den Einfluß der verschiedenen Marktformen auf die "gewinnoptimale Stellenzahl" zu analysieren[3]. Eigentliche Planungsmodelle, die als Grundlage unternehmerischer Entscheidungen dienen können, hat ALBERS jedoch nicht behandelt.

232 Die Berücksichtigung des Preis-Mengen-Zusammenhangs im Planungsmodell

Eine Einbeziehung der für die einzelnen Marktformen als typisch angesehenen Preis-Absatz-Funktionen in Planungsmodelle ist zwar theoretisch möglich, jedoch aus praktischen Gründen meist undurchführbar. Dies resultiert einmal aus der beschränkten Möglichkeit, alle Faktoren, die einen Einfluß auf die Preis-Absatz-Funktion ausüben, zu quantifizieren. Insbesondere sind es die Reaktionen von Konkurrenten und Nachfragern als auch die Einschätzung der Konjunkturlage, die sich einer Quantifizierung entziehen. Zum anderen hat es sich gezeigt, daß die Inte-

1) Vgl. FERNER (50), S. 39 ff.
2) Vgl. hierzu OTT (150)
3) ALBERS (1), S. 113 ff.

gration von Preis-Absatz-Funktionen in Planungsmodelle auf der Basis der mathematischen Programmierung deren Lösbarkeit erheblich einschränkt bzw. unmöglich macht, weil die Ansätze dadurch nichtlinear werden.[1)]

Aus diesem Grund geht man in Planungsmodellen, die Daten der Marktseite berücksichtigen müssen, von der Prämisse aus, "...daß die Verkaufspreise vom Markt bestimmt werden und ihre Höhe innerhalb bestimmter Grenzen von den Absatzmengen unabhängig ist."[2)]
Graphisch läßt sich dieser Sachverhalt etwa wie folgt veranschaulichen. (Eine polypolistische Preis-Absatz-Funktion wird durch eine "Treppenkurve" angenähert)

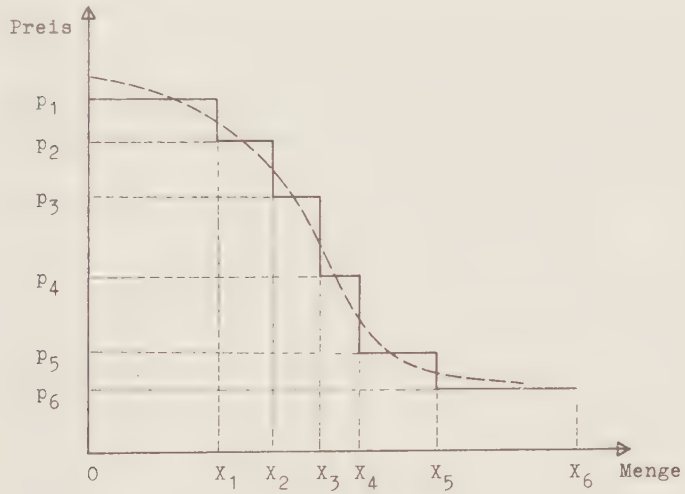


Abb.28: Annäherung einer polypolistischen Preis-Absatz-Funktion durch eine "Treppenkurve"

Setzt die Unternehmung den Preis p_1, so kann sie mit einer Höchstabsatzmenge X_1 rechnen. Setzt sie dagegen den Preis p_3, so ist die Höchstabsatzmenge X_3, usw. Praktisch geht man in Planungsmodellen nun so vor, daß man zunächst einen bestimmten Preis, sagen wir p_1, als konstante

1) Vgl. FERNER (50), S. 191
2) KILGER (104), S. 689

Größe vorgibt und die Entscheidungsvariable, die Produktionsmenge[1], durch eine Absatzrestriktion begrenzt. Von FERNER wird eine solche Restriktion als "reine Mengenrestriktion" bezeichnet[2]. Sie lautet für den vorliegenden Einproduktfall

(2.15) $$X_1 \geqslant x$$

Kurzzeichen:

x	Entscheidungsvariable: Menge
X_1	Absatzhöchstmenge beim Preis p_1

Sodann wird das Gewinnmaximum G_1 unter Beachtung sämtlicher Restriktionen errechnet. Der zweite Schritt besteht in der Vorgabe eines Preises p_2 mit der zugehörigen Absatzrestriktion $X_2 \geqslant x$ und der Errechnung des hierzu gehörigen Gewinnmaximums G_2. Dieses Vorgehen - als parametrische Abwandlung bezeichnet - wird so oft wiederholt, wie es Preisstufen gibt. Durch Vergleich von G_1 mit G_2, G_3, ... wird das maximum maximorum gefunden. Zugehöriger Preis und Menge geben die gewinnmaximale Preis-Mengen-Kombination an.

Dieses iterative Vorgehen ist zwar rechentechnisch einfach, jedoch arbeitsaufwendig. Eleganter läßt sich dieses Problem wie folgt lösen: Die potentielle Absatzmenge wird in soviele fiktive Mengen aufgeteilt, wie es Preisstufen gibt. Dem Produkt aus Preis und zugehöriger Absatzmenge wird eine Hilfsvariable u zugeordnet, die den Wert Eins oder Null annehmen kann, je nachdem ob das fiktive Produkt in der Lösung enthalten ist oder nicht. Die Z i e l f u n k t i o n lautet für eine Einproduktunternehmung:

(2.16.0) $$G = \sum_{f=1}^{\bar{f}} (p_f - k)\, x_f u_f - R$$

Kurzzeichen:

p_f	Preis der Stufe f (= 1,..., $\bar{f}$)
x_f	Absatzmenge beim Preis der Stufe f
u_f	Hilfsvariable
k	Proportionale Stückkosten
R	Nicht zurechenbare relevante Kosten

1) Prämisse: Keine Lagerbestände an Fertigprodukten. Absatzmenge gleich Produktionsmenge.
2) FERNER (50), S. 47

Diese Zielfunktion ist unter folgenden Nebenbedingungen zu maximieren:[1]

A b s a t z r e s t r i k t i o n e n

$$(2.16.1) \qquad X_f \geqslant x_f \qquad (f = 1, 2, \ldots, \bar{f})$$

Damit nur ein Preis wirksam wird, muß überdies gelten:[2]

$$(2.16.2) \qquad 1 = \sum_{f=1}^{\bar{f}} u_f$$

mit $$u_f = u_f^2 \qquad (f = 1, 2, \ldots, \bar{f})$$

Schließlich sind negative Absatz- und Produktionsmengen ausgeschlossen:

$$(2.16.3) \qquad x_f \geqslant 0 \qquad (f = 1, 2, \ldots, \bar{f})$$

Für die Mehrproduktunternehmung läßt sich der Ansatz entsprechend formulieren. Die Lösung des Ansatzes (2.16) wird in e i n e m Rechengang ermittelt. Der verminderte Arbeitsaufwand wird allerdings durch eine kompliziertere Struktur des Planungsmodells erkauft.

1) Hier werden nur diejenigen Nebenbedingungen aufgeführt, die sich aus der Existenz einer diskreten Preis-Absatz-Funktion ergeben. Kapazitätsrestriktionen wurden nicht aufgeführt.
2) Preisdifferenzierung sei ausgeschlossen.

3 GRUNDLAGEN UND DEFINITIONEN ZU EINER ALLGEMEINEN THEORIE DER BEDIENUNGSSYSTEME (THEORIE DER WARTESCHLANGEN)

31 Gegenstand der Warteschlangentheorie[1)]

Gegenstand der Warteschlangentheorie bildet die vorwiegend mathematische aber auch wirtschaftliche Analyse des Flusses von Einheiten (Personen, Sachen, Vorgängen, hier: Betriebsmittel) durch konkrete oder abstrakte Bedienungssysteme (Stationen, Kanäle, Engpässe, Schalter, "bottle necks", "trunks", hier: Bedienungsarbeiter). Eine Theorie der Warteschlangen (oder Bedienungssysteme) rechtfertigt sich dadurch, daß alle in der Realität[2)] auftretenden Warteschlangensituationen gewisse stochastische oder deterministische Gesetzmäßigkeiten bei der Bildung und dem Abbau von Warteschlangen aufweisen. Dem stochastischen Charakter des Ankunfts- und Abfertigungsprozesses gemäß, können in den betrachteten Systemen in gewissen Teilperioden oder dauernd Stauungen[3)] auftreten. Die auf Bedienung wartenden Zugangseinheiten bzw. die auf Bedienung wartenden Abfertigungsschalter stellen Warteschlangen dar. So SCHNEEWEISS: "Tatsächlich besteht jede Warteschlange aus zwei Schlangen: die auf Bedienung wartenden Kunden und die auf Kunden wartenden Bedienungsstationen. Man spricht in diesem Zusammenhang von der Dualität einer Warteschlangensituation."[4)]

Jedes Warteschlangenphänomen kann in ein System - W a r t e s y s t e m genannt[5)] - eingegliedert werden. Wartesysteme werden durch folgende drei Charakteristika hinreichend genau beschrieben:[6)]

1. I n p u t : Aus einem endlichen oder unendlichen Reservoir (Quel-

1) Englisch: waiting-line theory, queu(e)ing theory, theory of queues. Über das Gebiet der Warteschlangentheorie gibt es drei ausführliche - wenn auch bereits veraltete - Bibliographien: DOIG (43), S. 490-514; LUNGER (125); RILEY (164). Eine ausgezeichnete Literaturübersicht über die wichtigsten Werke bietet auch SAATY (172), S. 375-413.
2) Beispiele für typische Warteschlangensituationen bringen u. a.: FERSCHL (51), S. 33; GALLIHER (65), S. 106; KAUFMANN-CRUON (98), S. 29; SCHNEEWEISS (177), S. 473
3) Englisch: congestion problems
4) SCHNEEWEISS (177), S. 474. Auf dieser Betrachtungsweise beruhen auch ökonomische Überlegungen.
5) Vgl. FERSCHL (51), S. 32 ff.
6) Vgl. BHARUCHA-REID (20), S. 375; BHATIA (21), S. 13-17; COX-SMITH (35), S. 4; FERSCHL (51), S. 32 ff.; KAUFMANN-CRUON (98), S. 28 ff.; KENDALL (99), S. 151-185; SAATY (172), S. 9 ff.; SCHNEEWEISS (177), S. 472; PARZEN (156), S. 5. Vgl. auch Kapitel 325.

le)[1] kommen in deterministischer oder stochastischer Folge Einheiten[2] in das System, um dort in irgendeiner Weise abgefertigt zu werden. Den Strom von ankommenden Einheiten bezeichnet man als Input-Strom[3] oder Input-Prozeß[4].

2. S c h l a n g e n - D i s z i p l i n[5]: Sie gibt an, auf welche Art und Weise wartende Einheiten eine Schlange bilden und zur Bedienung ausgewählt werden. (Auswahlordnung)

3. O u t p u t: Die Einheiten werden von dem Bedienungssystem (Servicesystem[6]) in deterministischer oder stochastischer Folge abgefertigt und verlassen das Wartesystem. (Output-Strom; Output-Prozeß)

Die genannten Systemcharakteristika - Input, Schlangen-Disziplin, Output - sind nur insoweit bezeichnende Eigenschaften, als durch sie jedes Warteschlangenphänomen allgemein beschrieben wird. Zur Spezifizierung der Struktur spezieller Wartesysteme bedarf es detaillierter Angaben hinsichtlich der einzelnen Charakteristika. Dies soll im nächsten Kapitel unter besonderer Berücksichtigung der Mehrstellenarbeit geschehen.

32 Allgemeine Beschreibung von Wartesystemen unter besonderer Berücksichtigung der Mehrstellenarbeit[7]

321 Offene und geschlossene Systeme[8]

Je nachdem die Einheiten nach der Bedienung das System verlassen oder in ihm weiterverbleiben, unterscheiden wir o f f e n e oder g e s c h l o s s e n e S y s t e m e.

---

1) Vgl. BHATIA (21), S. 13; KAUFMANN-CRUON (98), S. 28
2) Die ankommenden Einheiten werden auch oft als "Kunden" bezeichnet; engl.: customer, arrivals, calls; frz.: clients.
3) Vgl. FERSCHL (51), S. 41 ff.
4) Vgl. KENDALL (99), S. 152
5) Engl.: queue-discipline
6) Engl.: service-mechanism, service system
7) Vgl. hierzu: BHATIA (21), S. 13-17; COX-SMITH (35), S. 1-32; FERSCHL (51), S. 32-50; KAUFMANN-CRUON (98), S. 28-37; KENDALL (99), S. 151-154; KENDALL (100), S. 338-341; RIORDAN (165), S. 1-7; SAATY (170), S. 162; SCHNEEWEISS (177), S. 471 f., S. 489-499
8) Die Begriffe 'offenes-' und 'geschlossenes System' stammen von KAUFMANN-CRUON (98), S. 37: "...le système étudié sera dit >ouvert<; il est alors alimenté par une source disposant d'un nombre infini de clients... Le nombre total d'unités dans le phénomène est fini ...; on dira alors que le système est fermé."

Offenes System (unlimited source, infinite population)
(Abb. 29)

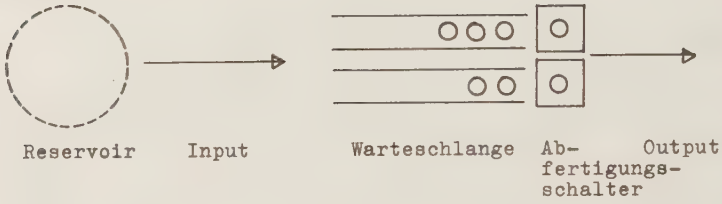


Abb.29: Offenes System

Aus einem im allgemeinen unendlichen Reservoir kommen Einheiten in das System, die dieses nach der Abfertigung wieder verlassen, ohne durch das Verweilen im System eine Bindung irgendwelcher Art an dieses System erfahren zu haben.

Geschlossenes System (limited source, finite population)
(Abb. 30)

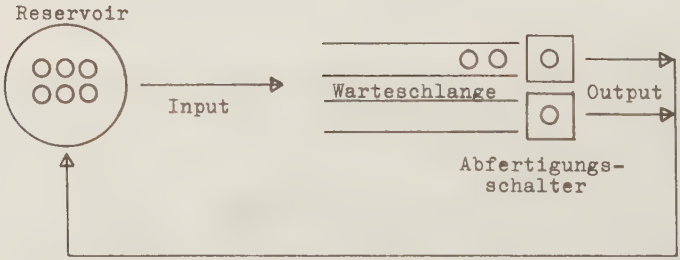


Abb.30: Geschlossenes System

Aus einem im allgemeinen endlichen Reservoir kommen Einheiten in das

System, werden dort abgefertigt und kommen anschließend wieder in das Reservoir, um von dort wieder in das System zu kommen usw.

Beim geschlossenen stochastischen System haben wir eine je nach Modell verschieden starke K o p p l u n g zwischen Input und Output, während bei offenen Systemen eine derartige Kopplung generell nicht besteht.

Die Kopplung zwischen Input und Output, die sich bei mathematischen Aussagen über das Verhalten des Systems unter sehr allgemeinen Prämissen in einer Kopplung von Integralgleichungen über Randwerte äußert[1], macht die exakt mathematische Behandlung von geschlossenen Systemen unter allgemeinen Prämissen sehr schwierig.

Die in dieser Arbeit im Zusammenhang mit Mehrstellenarbeit betrachteten Systeme sind alle g e s c h l o s s e n e S y s t e m e. Wie bereits erwähnt, führt die mathematische Analyse von geschlossenen Systemen unter a l l g e m e i n e n Prämissen zu mathematischen Problemen, die über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehen. Da die mathematischen Ergebnisse für das allgemeine Modell mit mehr als zwei Arbeitsstellen und einem Bedienungsarbeiter auch noch nicht vorliegen[2], möchte der Verfasser die Untersuchungen bei stochastischen Systemen auf bereits bekannte Modelle beschränken. Dabei ist jedoch anzumerken, daß die ökonomische Folgerechnung, wie sie in dieser Arbeit betrachtet wird, auch für den allgemeinen Fall anwendbar sein wird, da sie im wesentlichen nur von den Zustandswahrscheinlichkeiten des Systems abhängt.

322 Der Input

1. Die ankommenden Einheiten sind ihrer Art nach wie folgt zu unterscheiden:
   a) homogene Ankunftseinheiten
   b) heterogene Ankunftseinheiten
   c) verkettete Ankunftseinheiten

1) Vgl. BECKER (9), S. 31 ff.
2) Ein geschlossenes System unter allgemeinen Bedingungen mit zwei "Kunden" und einem Abfertigungsschalter behandelt BECKER (9).

Von h o m o g e n e n Ankunftseinheiten sprechen wir dann, wenn alle Einheiten durch die gleichen Parameter beschrieben werden können. Mit anderen Worten: Der Arbeitsplatz besteht aus gleichartigen Betriebsmitteln. Die Belegung aller Arbeitsstellen ist gleich.

In allen anderen Fällen sei von h e t e r o g e n e n Ankunftseinheiten gesprochen. Ursache der Heterogenität kann einmal die Art der an einem Arbeitsplatz installierten Betriebsmittel, zum anderen die Belegung der Arbeitsstellen sein. Von ungleichartigen Betriebsmitteln muß man z. B. schon dann sprechen, wenn "... Webmaschinen mit verschiedenen Tourenzahlen zu einem Bedienungsbereich zusammengefaßt wurden."[1] Die mit verschiedener Intensität laufenden Webstühle müssen praktisch als verschiedenartige Aggregate angesehen werden, weil die Intensität die Bruchhäufigkeit von Kett- und Schußfäden beeinflußt. In ähnlicher Weise beeinflußt die Garnqualität in Webereien die Bruchhäufigkeit und somit die Ausfallquote. Nur bei gleicher Maschinenbelegung werden an allen Webstühlen die gleichen Garne verwendet. In modischen Webereien kommt es jedoch oft vor, "... daß im Bedienungsbereich eines Webers zu gleicher Zeit verschiedene Artikel produziert werden."[2]

Von v e r k e t t e t e n Ankunftseinheiten sei dann gesprochen, wenn die Ankunft einer Einheit weitere Ankünfte verursacht oder nach sich zieht. Dies kann der Fall sein, wenn mehrere Maschinen in einem Produktionsprozeß so verknüpft sind, daß der Ausfall einer Stelle Ausfälle an anderen Stellen bedingt. So beschreibt ALBERS einen Fall aus der Wirk- und Strickindustrie. Rundwirkstühle und Rundstrickmaschinen "...weisen regelmäßig eine größere Zahl von Wirk- und Strickstellen auf... Dabei liegt die Besonderheit darin, daß eine gegenseitige Abhängigkeit zwischen allen Strickstellen einer Maschine gegeben ist. Kommt eine Strickstelle der Maschine zum Stillstand, so bleiben mit ihr alle anderen Strickstellen dieser Maschine stehen, obwohl keine eigenen Stillstandsursachen vorliegen."[3] Verkettete Ankunftseinheiten können im Modell wie e i n e Einheit behandelt werden.

1) AUTORENKOLLEKTIV (6), S. 15
2) AUTORENKOLLEKTIV (6), S. 16
3) ALBERS (1), S. 16

2. Von elementarem Interesse für die verbale Beschreibung und mathematische Behandlung von Bedienungssystemen ist die Kenntnis der Gesetzmäßigkeit, nach der Einheiten zur Bedienung eintreffen.

Zur Ermittlung dieses Gesetzes stelle man sich einen "Zähler" vor, an dem Einheiten zu den Zeitpunkten $t_1, t_2, \ldots, t_n$ $(0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty)$ eintreffen. Die Differenz zwischen der Ankunftszeit, zwischen der (n - 1)-ten Einheit und der n-ten Einheit sei mit

(3.1) $$h_n = t_n - t_{n-1}$$

bezeichnet. Der Input-Prozeß wird dann durch das Gesetz beschrieben, daß die Folge der Ankunftszeiten $\{t_j\}$ und die Folge der Zwischenankunftszeiten $\{h_j\}$ widergibt.[1)]

Der einfachste Fall liegt bei d e t e r m i n i s t i s c h e r Ankunft vor. Die Ankunft der Einheiten erfolgt in äquidistanten Zeitpunkten mit regelmäßigen Zeitintervallen der Länge h zwischen zwei aufeinanderfolgenden Einheiten. Die Anzahl der eintreffenden Einheiten pro Zeiteinheit - als A n k u n f t s r a t e bezeichnet - ist somit gegeben durch 1/h; d. h. die Ankunftsrate u ist konstant.[2)] (Abb. 31)

(3.2) $$u := \frac{1}{h}$$

Abb.31: Deterministische Ankunft

1) Vgl. BHARUCHA-REID (20), S. 375
2) Die Ankunftsrate wird in der Literatur meist mit dem Buchstaben λ bezeichnet.

Bei s t o c h a s t i s c h e r Ankunft erfolgen die Ankünfte in unregelmäßiger unvorhersehbarer Weise. Aus diesem Grund erscheint es zweckmäßig, daß der "Zähler" die Zahl der Ankünfte in einem Zeitintervall - sagen wir $[0,t)$[1] -, die eine Zufallsvariable darstellt, durch eine Z ä h l f u n k t i o n N(t) festhält. N(t) ist definiert für alle $t \geq 0$ und gibt die Anzahl Ankünfte an, die während der Zeitperiode von 0 bis t eingetroffen sind. Der Zeitpunkt Null bedeutet den Beginn der Beobachtungsperiode. Für jeden Zeitpunkt t ist N(t) der beobachtete Wert der Zufallsvariablen. Die Menge der Zufallsvariablen $\{ N(t), t \geq 0 \}$ bildet einen stochastischen Prozeß[2]. Im Falle der Mehrstellenarbeit kann die Variable N(t) nur ganzzahlige Werte annehmen, da jedem Betriebsmittelstillstand eine Ankunftseinheit entspricht. Das Bild der Funktion N(t) ist in Abbildung 32 dargestellt.

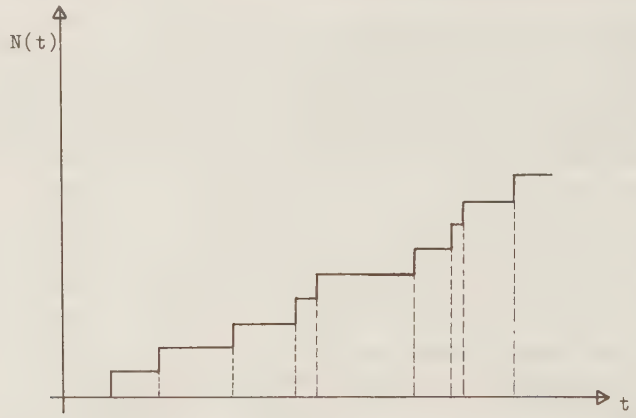


Abb.32: Realisation eines stochastischen Input - Prozesses

Es soll nun die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden, daß in einem Intervall $[0, t)$ n Ankünfte erfolgen.

(3.3) $P_n(t) := p (\{$ Im Intervall der Länge t erfolgen n Ankünfte $\})$

1) Die Schreibweise $[0, t)$ bedeutet ein rechts offenes und links geschlossenes Zeitintervall. Zum Begriff des Zeitintervalls vgl. KREYSZIG (114), S. 345

2) Vgl. hierzu Kapitel 332

Ein stochastischer Prozeß, der den folgenden Bedingungen genügt, heißt Poisson-Prozeß:[1)]

Bed. I : Unabhängigkeitsbedingung
Die Anzahlen der Einheiten, die in fremden Zeitintervallen eintreffen, sind stochastisch unabhängig voneinander.

Bed. II : Stationaritätsbedingung
Die Wahrscheinlichkeit für n Ankünfte in einem Zeitintervall der Länge t hängt nur von t und nicht von dessen zeitlicher Lage ab.

Bed. III : Seltenheitsbedingung
Die Ereignisse sind in der zeitlichen Reihenfolge ihres Eintreffens unterscheidbar, d. h.

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{P_{>1}\ (t/n)}{t/n} = 0$$

1) Nach dem französischen Mathematiker S.D. POISSON, der die Poisson-Verteilung 1837 ableitete.
Es gibt verschiedene Möglichkeiten, den Poisson-Prozeß axiomatisch herzuleiten:
1. als reiner Geburten-Prozeß mit konstanter Geburtenrate
2. als Erneuerungsprozeß mit exponential verteilten Zwischenankunftszeiten
3. als ganzzahliger stochastischer Prozeß mit stationären unabhängigen Zuwächsen.
Vgl. PARZEN (156), S. 278 ff., S. 170 ff., S. 118 ff. Im übrigen vgl. folgende Literatur:
COX-SMITH (35), S. 6 f.; CRAMER (36), S. 104 ff.; FABRYCKY-TORGERSEN (47), S. 343 ff.; FAURE-BOSS-LE GARFF (48), S. 47 f.; FELLER (49), S. 400 ff.; FERSCHL (51), S. 19 ff., S. 27, S. 43; FISZ (55), S. 233 ff.; FÖRSTNER (58), S. 198 f.; FRY (64), S. 220 ff.; LE GALL (120), S. 47 ff., S. 92 ; GIRAULT (72), S. 5; GNEDENKO (73), S. 274 ff., S. 296 f.; HALD (80), S. 731 ff.; KAUFMANN-CRUON (98), S. 17 ff.; KROMPHARDT-HENN-FÖRSTNER (115), S. 351 ff.; MENGES (136), S. 232 ff.; SAATY (171), S. 335 ff.; SAATY (172), S. 33 ff., S. 75; SÖHNGEN (181) S. 5, S. 14 ff.; TAKACS (186), S. 37

Beim P o i s s o n - P r o z e ß gilt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:[1)]

$$P_n(t) = \frac{(ut)^n}{n!} e^{-ut} \tag{3.4}$$

Die $P_n(t)$ sind echte Wahrscheinlichkeiten; für sie gelten:

$$0 \leq P_n(t) \leq 1 \qquad \text{für jedes } t \text{ und } n \tag{3.5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1 \tag{3.6}$$

Der Poisson-Prozeß hat in der Anwendung der Warteschlangentheorie auf Probleme der stochastischen Mehrstellenarbeit eine relativ große Bedeutung erlangt. Einmal können viele praktische Vorgänge durch ihn in guter Annäherung beschrieben werden. Zum anderen wird die mathematische Behandlung eines Bedienungssystems, dessen Input durch einen Poisson-Prozeß gesteuert wird, erheblich vereinfacht. Eine der angenehmsten Eigenschaften des Poisson-Prozesses soll hier kurz als Beispiel angedeutet werden. Zugleich wird damit die Bedeutung des Parameters u aufgewiesen. Es soll nämlich gezeigt werden, daß beim Poisson-Prozeß die Zeit zwischen zwei Ankünften exponentiell verteilt ist und daß 1/u die mittlere Laufzeit der Aggregate ist.

Sei

$$\theta := \text{Laufzeit zwischen zwei Ausfällen}$$

und

$$A(x) := p\ (\theta \leq x)$$

Wir bestimmen nun A(x) unter der Voraussetzung, daß die Ausfälle poissonverteilt sind, also

$$P_n(t) = \frac{(ut)^n}{n!} e^{-ut} \tag{3.7}$$

---

1) Auf eine Herleitung und einen Beweis des Poisson-Prozesses sei hier verzichtet. Vgl. z. B. SÖHNGEN (186), S. 6-16

Wegen $\{\theta \leq x\} \cup \{\theta > x\} = \{E\}$ [1] und
$\{\theta \leq x\} \cap \{\theta > x\} = \emptyset$ [2] folgt, daß

(3.8) $p(\theta \leq x) + p(\theta > x) = p(E) = 1$

bzw.

(3.9) $p(\theta \leq x) = 1 - p(\theta > x)$

Das Ereignis $\{\theta > x\}$ ist aber gleichbedeutend mit dem Ereignis { während x ZE fällt keine Maschine aus } [3], d. h. aber

(3.10) $p(\theta > x) = p_0(x)$

$= 1 \cdot e^{-ux}$

Somit erhält man

(3.11) $$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 - e^{-ux} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Die Teilung der Verteilungsfunktion bzgl. $x \leq 0$ und $x > 0$ ergibt sich wie folgt:

0 für $x < 0$ Die Laufzeit θ kann nicht negativ sein.
0 für $x = 0$ Wegen Bed. III

A(x) ist eine differenzierbare Verteilungsfunktion. Für den Erwartungswert erhält man

(3.12) $$E(\theta) = \int_0^\infty x\, A'(x)\, dx$$

$$= \int_0^\infty x\, ue^{-ux}\, dx$$

$$= u\left(-\frac{x}{u} e^{-ux} \Big|_0^\infty + \frac{1}{u} \int_0^\infty e^{-ux}\, dx\right)$$

1) {E} := Sicheres Ereignis; p (E) = 1
2) $\emptyset$:= Unmögliches Ereignis (leere Menge); p ($\emptyset$) = 0
3) Auf eine zeitliche Fixierung der Zeitspanne x kann wegen Bed. II verzichtet werden.

$$= u \left(0 - \frac{1}{u^2} \; e^{-ux} \Big|_0^{\infty} \right)$$

$$= \frac{1}{u}$$

Mit anderen Worten: u ist der Kehrwert der mittleren Laufzeit der Maschinen.

Der Graph der Verteilungsfunktion $1 - e^{-ux}$ und deren Wahrscheinlichkeitsfunktion ue^{-ux} ist in Abbildung 33 und 34 dargestellt.

3. Anschließend ist die Frage zu untersuchen, inwieweit und unter welchen Bedingungen der Poisson-Prozeß bei der Beobachtung von Maschinenstillständen auftritt. Hierbei ist zu prüfen, ob die Bedingungen I bis III als mathematische Idealisierung beobachteter Eigenschaften der untersuchten Erscheinung betrachtet werden können. Diese Meinung wird in der Literatur oft vertreten, zumindest, daß die Bedingungen bei stochastischer Mehrstellenarbeit n ä h e r u n g s w e i s e erfüllt sind[1].

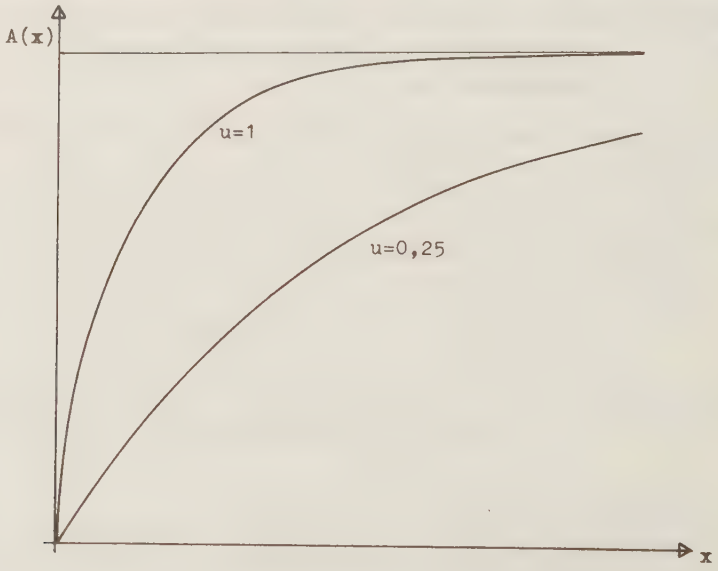


Abb.33: Bild der Funktion $A(x) = 1 - e^{-ux}$

1) Stillstände aus Alterungserscheinungen der Maschinen werden davon ausgenommen, weil die Stationaritätsbedingung offensichtlich nicht erfüllt ist.

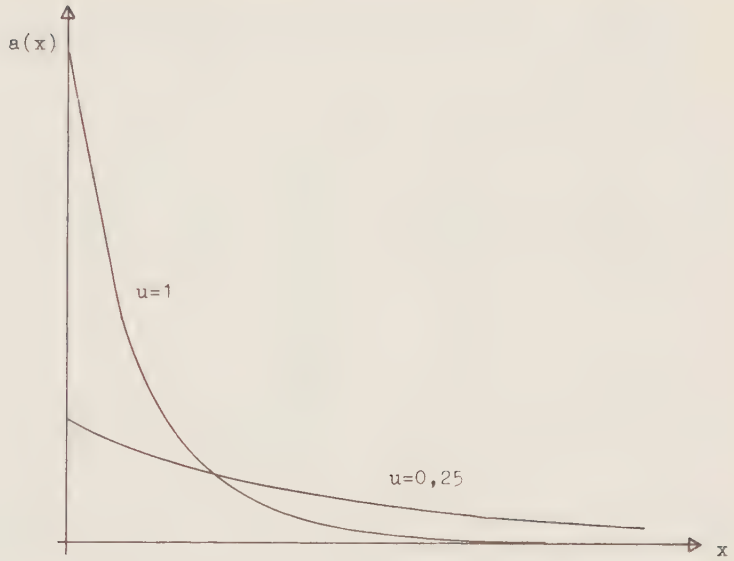


Abb.34: Bild der Funktion $a(x) = ue^{-ux}$

Maschinenstillstände werden häufig durch Materialfehler des zu bearbeitenden Werkstoffes verursacht. Insbesondere in der Textilindustrie stellen die durch Materialfehler verursachten Maschinenstillstände ein zentrales Problem dar. Statistische Methoden bei textilen Untersuchungen haben gezeigt, daß die Anzahl der Fadenbrüche in Spinnereien und Webereien innerhalb einer vorgegebenen Zeitspanne als poissonverteilt angesehen werden können.[1] GRAF und HENNING nennen folgende Beispiele:[2]

" 1. Fadenbrüche an einer Spindel (oder mehreren unter gleichen Bedingungen laufenden Spindeln),
2. Kettfadenbrüche
3. Noppen in Kammzügen
4. Auftreten von Maschinenschäden usw."

Ähnliche Verhältnisse liegen, wie WINKEL hervorhebt, in Drahtziehereien vor.[3]

1) Vgl. GRAF-HENNING (75), S. 166; KREYSZIG (114), S. 117; STORM (183), S. 51
2) GRAF-HENNING (75), S. 166
3) Vgl. WINKEL (218), S. 10

Als Ausgangspunkt für die Modellanalyse stochastischer Mehrstellenarbeit erscheint das Modell der Poisson-Verteilung zur Beschreibung der Ankunft der Einheiten geeignet. So schreibt bereits T.C. FRY: "Hence it comes about that the Poisson Law is the fundamental basis upon which are solved most of those problems which demand to know the number of persons..., which will be needed to perform a given service." [1] Auch KREYSZIG kommt zu diesem Schluß: "Die Poisson-Verteilung ist ein im Zusammenhang mit verschiedenartigen praktischen Problemen vielseitig verwendbares Modell." [2] Und HEINZ: "Die Annahme einer Exponentialverteilung für die Zwischenankunfts- bzw. Maschinenlaufzeiten kann theoretisch begründet und praktisch verifiziert werden." [3]

4. Anhand empirischen Zahlenmaterials soll als Beispiel abschließend untersucht werden, ob die Anzahl der Maschinenstillstände innerhalb einer festen endlichen Zeitspanne einen Poisson-Prozeß bildet.

Hierzu wurden 12 Maschinen gleichen Typs, die alle mit gleichen Arbeitsgegenständen belegt waren, an 5 Tagen während 8 Stunden beobachtet. Pro Stunde wurden 30 Beobachtungen durchgeführt. Die Gesamtzahl N der Beobachtungen betrug demnach

$$N = 5 \cdot 8 \cdot 30 = 1200$$

Aufgezeichnet wurde jeweils die Anzahl stillstehender Maschinen.

Die Spalten (1), (2) und (3) der nachstehenden Tabelle 10 zeigen die Häufigkeitsverteilung des empirischen Zahlenmaterials.

---

1) FRY (64), S. 229
2) KREYSZIG (114), S. 117
3) HEINZ (84), S. 207

Anzahl stillstehender Maschinen n	Beobachtete Häufigkeit f (n)	Gesamtzahl Stillstände n f (n)	Theoretische relative Häufigkeit P_n (t)	Theoretische Häufigkeit h (n)	$\frac{[f(n) - h(n)]^2}{h(n)}$
1	2	3	4	5	6
0	54	0	0,047 261	56,71	0,129
1	182	182	0,144 303	173,16	0,451
2	272	544	0,220 300	264,36	0,221
3	265	795	0,224 212	269,05	0,061
4	184	736	0,171 145	205,37	2,224
5	128	640	0,104 511	125,41	0,054
6	72	432	0,053 183	63,82	1,048
7	24	168	0,023 197	27,84	0,529
8	11	88	0,008 853	10,62	0,013
9	4	36	0,003 003	3,60	
10	2	20	0,000 916	1,10	0,455
11	1	11	0,000 254	0,30	
12	1	12	0,000 065	0,08	
	1200	3664	1,001 203	1201,42	= 5,185

Tabelle 10: Praktisches Beispiel

Als mittlere Anzahl stillstehender Maschinen ergibt sich

$$\bar{x} = \frac{3664}{1200} = 3{,}0533$$

Um festzustellen, ob den beobachteten Häufigkeiten ein Poisson-Prozeß zugrunde liegt, macht man die Hypothese, daß

$$P_n(t) = \frac{(ut)^n}{n!} e^{-ut}$$

gilt. Der Mittelwert dieser Verteilung wird angenähert mit ut = 3,0533 angenommen. Die theoretischen Häufigkeiten der Spalte (4) lassen sich somit errechnen:

$$P_0(t) = e^{-3{,}0533} = 0{,}047261$$

$$P_1(t) = \frac{3{,}0533}{1} \; 0{,}047261 = 0{,}144303$$

$$P_2(t) = \frac{3{,}0533}{2} \; 0{,}144303 = 0{,}220300$$

. . .

Durch einen χ^2-Test läßt sich prüfen, ob die gemachte Hypothese gerechtfertigt ist. Die Klassen 9, 10, 11 und 12 werden zu einer einzigen Klasse vereinigt, da für die praktische Anwendung zu fordern ist,

daß $h(n) \geq 5$.

$$\chi^2 = \sum_n \frac{\left[f(n) - h(n) \right]^2}{h(n)}$$

Für das Beispiel erhält man: $\chi^2 = 5{,}185$. Bei einem Signifikanzspiegel von 5 % erhält man aus einschlägigen Tabellen die zu einem Freiheitsgrad f = 10[1] gehörende Signifikanzgrenze

$$\chi^2_{0,95} = 18{,}307$$

Da der errechnete Wert kleiner ist, darf man annehmen, daß die Abweichung der beobachteten Werte von den theoretischen zufallsbedingt ist.

323 Die Auswahlordnung

1. Als zweites Charakteristikum von Bedienungs- oder Wartesystemen wird gemeinhin die S c h l a n g e n d i s z i p l i n genannt. D.G. KENDALL versteht hierunter "...the rule or moral code determining the manner in which the customers form up into a queue and the manner in which they behave while waiting."[2] Die Art und Weise wie ankommende Einheiten eine Schlange bilden bzw. wie sie sich einfügen, kann zu einer geordneten (einfache oder mehrfache Linie) und zu einer ungeordneten Schlange (Haufen) führen. Die Form der Schlange - Linie oder Haufen - und das Verhalten der wartenden Einheiten, z. B. Drängeln, ferner das Phänomen des ungeduldigen Kunden, der sich erst gar nicht in die Schlange einreiht bzw. vorzeitig ausbricht, d. h. vor Eintritt in das Servicesystem aus der Warteschlange ausscheidet, sowie bei mehrfach geordneten Schlangen das Springen von Einheiten von Schlange zu Schlange, ist bei Mehrstellenarbeit im Gegensatz zu anderen Wartesystemen von keinerlei Bedeutung für die Abberufung der Einheiten zur Bedienung.

Bei Mehrstellenarbeit wird die Reihenfolge der Bedienung p l a n m ä ß i g vorgegeben. Dies folgt aus der Struktur des Phänomens der Mehrstellenarbeit. Die stillstehenden Maschinen formen keine sichtbar geordnete Linie, wie etwa wartende Kunden vor einem Postschalter, son-

1) Der Freiheitsgrad f errechnet sich: Zahl der benutzten Klassen (12), vermindert um 2, da zur Berechnung der Poisson-Verteilung 2 Parameter ($\bar{x} = 3{,}0533$; N = 1200) benutzt wurden.
2) KENDALL (99), S. 152

dern sie bilden nur eine "gedachte" Warteschlange. Die Reihenfolge der Bedienung stillstehender Maschinen wird im wesentlichen durch folgende Faktoren bestimmt.[1)]

1. Die Belegung der Arbeitsstellen eines Bedienungsbereiches mit homogenen oder heterogenen Arbeitsgegenständen.
2. Die zeitliche Dauer der einzelnen Arbeitsverrichtungen.
3. Die Bedienungsmethode.

Je nach der Dominanz des einen oder anderen Faktors, die aus sachlichen Gründen oder durch dispositiven Akt hervorgeht, haben sich verschiedene Auswahlordnungen herausgebildet, die wir in Anlehnung an FERSCHL darstellen wollen.

2. FERSCHL nimmt folgende Einteilung vor:[2)]

1. Auswahlregeln, die von der Stellung der wartenden Einheit in der (konkreten oder abstrakten) Warteschlange abhängen:
   a) die n a t ü r l i c h e A u s w a h l o r d n u n g: Diese Auswahlordnung ist in der anglo-amerikanischen Literatur als "first come - first served" bekannt. Dieser Slogan charakterisiert in treffender Weise die natürliche Auswahlordnung. Die meisten Warteschlangenmodelle benutzen - wenn auch oft unausgesprochen - diese Auswahlregel. Die natürliche Auswahlordnung wird immer dann angewandt werden, wenn alle Arbeitsstellen mit homogenen Arbeitsgegenständen belegt sind, die zeitliche Dauer der einzelnen Arbeitsverrichtungen nahezu gleich ist, die Bedienungsbereiche klein und damit überschaubar sind und die Grundform der Anforderungsbedienung durchgeführt wird.

   b) die Z u f a l l s a u s w a h l : Bei dieser Auswahlordnung werden die wartenden Einheiten "auf gut Glück" ausgewählt. Die Zufallsauswahl entspricht bei Mehrstellenarbeit nicht einer rationalen, wissenschaftlichen Betriebsführung und ist deshalb abzulehnen[3)]. Eine vorausschauende Planung des Arbeitsablaufs ist bei dieser Methode nicht möglich.

---

1) Vgl. hierzu auch AUTORENKOLLEKTIV (6), S. 15 ff.
2) Vgl. FERSCHL (52), S. 149 ff.; FERSCHL (51), S. 157 ff.
3) Anders in der Spieltheorie, z. B. bei Spielen gegen die Natur

c) die inverse Auswahlordnung: Diese Auswahlregel erscheint auf den ersten Blick absurd, denn wer zuletzt kommt, wird zuerst bedient (last come - first served). Diese Auswahlordnung kommt zwangsläufig bei Stapelvorgängen vor, d. h. wenn wartende Einheiten - etwa zu bearbeitende Bleche, Teller u. ä. - vor der Bedienungsstelle gestapelt werden. Diese Auswahlregel bei Mehrstellenarbeit zum Prinzip zu erheben, wäre unsinnig. Dennoch kommt sie mitunter in der Praxis vor, wenn sie auch nicht planmäßig vorgegeben wurde. Bei turnusmäßiger Bedienung kann der Fall eintreten, daß eine Maschine gerade in dem Augenblick stehen bleibt, in dem der Bedienungsarbeiter die Maschine inspiziert. Sie wird natürlich sofort bedient, obwohl andere Maschinen bereits vorher stillstanden.

Von größerer Bedeutung bei Mehrarbeitsstellenbedienung sind

2. die Auswahlregeln, die von einer vorgegebenen Rangordnung der eintreffenden Einheiten abhängen.
   Diese Auswahlregeln legen Prioritäten fest, die bei der Bedienung der einzelnen Einheiten beachtet werden müssen. Prioritätsregeln werden insbesondere dann aufgestellt, wenn die Arbeitsstellen mit heterogenen Arbeitsgegenständen belegt sind und die zeitliche Dauer der einzelnen Arbeitsverrichtungen stark streut. Im einzelnen lassen sich folgende Gründe aufzählen:

   1. Arbeitsstellen, die pro Laufzeiteinheit einen höheren Gewinn erbringen, werden vorrangig bedient.

   2. Zuerst sind jene Arbeitsverrichtungen bei gleichzeitigem Stillstand mehrerer Arbeitsstellen zu verrichten, die den geringsten Zeitaufwand erfordern.

   3. Während des Maschinenlaufs sind alle Arbeiten zu unterbrechen, wenn eine Arbeit zur Behebung eines Maschinenstillstandes erforderlich wird.

   4. Länger andauernde Arbeitsverrichtungen bei Maschinenstillstand sind zugunsten kürzerer Arbeiten bei Maschinenstillstand zu unterbrechen.

Die Anwendung dieser Grundsätze schafft eine Rangordnung der einzelnen Arbeitsstellen mit unterschiedlicher Dringlichkeit. Die Rangnummern können durch äußere Gegebenheiten - wie z. B. Gewinn, Termindruck u. ä. - gegeben sein, oder sie stehen direkt mit dem Mechanismus der Bedienung

in Verbindung, z. B. die Dauer der Bedienungszeit.
Je nach Behandlung einer in einer Bedienungsstelle befindlichen Einheit unterscheidet FERSCHL

a) a b s o l u t e P r i o r i t ä t e n[1]: Neuzugänge mit höherer Rangnummer werden sofort bedient, auch wenn dazu die laufende Bedienung einer anderen Einheit mit niedrigerer Rangnummer unterbrochen werden muß. Die Bedienung der verdrängten Einheit wird erst dann wieder aufgenommen, wenn keine Einheit höherer Rangnummer wartet.

b) r e l a t i v e P r i o r i t ä t e n[2]: Neuzugänge mit höherer Rangnummer werden erst dann bedient, wenn die Bedienung einer anderen Einheit, gleich welcher Rangnummer, beendet ist.

c) P r i o r i t ä t e n m i t E r m e s s e n s s p i e l r a u m[3]: Hier handelt es sich um eine Mischform der Typen a) und b). Neuzugänge mit höherer Rangnummer werden sofort bedient, wenn die Restservicezeit der gerade in Bedienung befindlichen Einheit mit niederer Rangnummer groß ist. Ist die Restbedienungszeit klein, so wird die laufende Bedienung bis zum Ende ausgeführt.

324 Das Bedienungssystem

1. B e d i e n u n g s s y s t e m e beschreiben das Zusammenwirken der einzelnen Bedienungsstellen, die mit der Abfertigung der wartenden Einheiten betraut sind. Als erstes steht die A n z a h l der Bedienungsstellen im Vordergrund des Interesses. Je nachdem, ob ein Arbeiter oder mehrere Arbeiter eine fest vorgegebene Anzahl von Arbeitsstellen bedienen, handelt es sich - wie bereits ausgeführt - um mehrstellige Einzel- bzw. mehrstellige Gruppenarbeit. Diese Unterscheidung ist - wie noch zu zeigen sein wird - für die Effizienz von Wartesystemen von besonderer Bedeutung. Bei mehrstelliger Gruppenarbeit können die Bedienungsarbeiter entweder alle die gleichen Aufgaben wahrnehmen oder sie sind auf irgendeine Verrichtung spezialisiert. Im ersten Fall könnte man von einer parallelen Anordnung der Bedienungsstellen sprechen, im zweiten Fall von einer Hintereinanderschaltung, wenn die Facharbeiter nacheinander zur Behebung eines Stillstandes tätig werden. Man spricht hier auch von Serienanordnung der Bedienungsstellen.

---
1) Engl.: preemptive priority
2) Engl.: head of the line priorities
3) Engl.: discretionary priorities

Sowohl bei Parallelbedienung als auch bei Serienbedienung können mehrere stillstehende Maschinen zugleich bedient werden. Theoretisch denkbar wäre der Fall, daß alle Arbeiter gleichzeitig nur eine Maschine bedienen; dies dürfte jedoch aus technischen Gründen nur selten möglich sein.

2. Ein Merkmal, das meist bei der Beschreibung von Bedienungssystemen im Vordergrund steht, ist die B e d i e n u n g s m e t h o d e. Hier lassen sich die bereits im Kapitel 13 beschriebenen Grundformen der Anforderungs- und der Turnusbedienung unterscheiden, so daß hier auf eine Behandlung verzichtet werden kann.

3. Von Bedeutung für die Beschreibung von Bedienungssystemen ist auch der Prozeß, der durch die Abfertigung der Einheiten gebildet wird. Wir wollen uns hier darauf beschränken, einige gebräuchliche Verteilungsfunktionen für die B e d i e n u n g s z e i t e n[1] anzugeben.

31. Haben die Zeitintervalle zwischen den einzelnen Bedienungen gleiche Länge h, so liegt der Fall k o n s t a n t e r Bedienungs- oder Abfertigungszeiten vor. Die potentielle Anzahl abzufertigender Einheiten pro Zeiteinheit - als Abfertigungsrate bezeichnet - ist somit gegeben durch 1/h. Die Annahme konstanter Bedienungszeiten dürfte eine Idealisierung tatsächlicher Gegebenheiten darstellen, da in den meisten Fällen Schwankungen in den Bedienungszeiten festzustellen sind.

32. Die Behandlung der meisten stochastischen Modelle zur Ermittlung optimaler Bedienungssysteme wird durch die Annahme e x p o n e n t i e l l verteilter Bedienungszeiten wesentlich vereinfacht[2]. Die Prämissen, unter denen eine Exponentialverteilung der Bedienungszeiten eintritt, sind die gleichen, die beim Poisson-Prozeß benötigt wurden. Hier galt der Satz: "Wenn bei einem stochastischen Prozeß die Signale poissonverteilt sind, dann sind die Zeitabstände zwischen den einzelnen Signalen exponentialverteilt."[3] Einen Beweis der Umkehrung dieses Satzes bringt Söhngen[4]. Die abgefertigten Einheiten bilden einen Poisson-Prozeß unter der Voraussetzung, daß die Abfertigungszeiten der Einheiten exponentialverteilt sind.

---

1) Engl.: service times; holding times. Frz.: durée de service.
2) Vgl. COX-SMITH (35), S. 19ff.; FABRYCKY-TORGERSEN (47), S. 343 ff.; FELLER (49), S. 411 ff.; FÖRSTNER (58), S. 209 ff.; LE GALL (120), S. 111 ff.; KROMPHARDT-HENN-FÖRSTNER (115), S. 369 ff.; MORSE (140), S. 7 ff.; SAATY (171), S. 336; SAATY (172), S. 37
3) SÖHNGEN (181), S. 18
4) Vgl. SÖHNGEN (181), S. 20-22

Die Verteilungsfunktion lautet somit:

$$B(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ 1 - e^{-vt} & \text{für } t > 0 \end{cases} \tag{3.13}$$

und die zugehörige Dichtefunktion:

$$b(t) = ve^{-vt} \qquad \text{für } t > 0 \tag{3.14}$$

v ist ein positive Konstante, deren Bedeutung wie folgt aufgezeigt werden kann. Für den mittleren Wert der Abfertigungszeit erhält man

$$E(t) = \int_0^\infty t\, ve^{-vt}\, dt = \frac{1}{v} \tag{3.15}$$

Folglich ist v der Kehrwert der mittleren Bedienungszeit einer Einheit; v gibt somit die mittlere Zahl der Abfertigungen pro Zeiteinheit an. In der Literatur wird v deshalb als durchschnittliche A b f e r t i g u n g s r a t e bezeichnet.[1)]

In der Praxis hat sich gezeigt, daß eine Exponentialverteilung der Bedienungszeiten des öfteren vorkommt. "In many situations we observe that intervals are exponentially distributed ever though there is almost no a priori reason at ail to think that they are generated by a Poisson process. A very well-known example is the duration of local telephone calls...Similarly it is often found that the time required to serve customers at a ticket window or mechanics at a tool crib has an exponential distribution."[2)]

BRIGHAM konnte anhand empirischen Zahlenmaterials zeigen, daß die Bedienungszeiten an einem Werkzeugausgabeschalter exponentialverteilt sind[3)]. Auch MANGELSDORF hat einige auf empirischen Zahlenmaterial beruhende Verteilungsfunktionen mit der Exponentialverteilung verglichen und kommt dabei zu folgendem Schluß: "In all instances, it es seen that there definitely is a tendency for the actual times to be exponentially distributed. Accordingly, the assumption of an exponential distribution is completely realistic."[4)]

1) Die Abfertigungsrate (hier mit v gekennzeichnet) wird in der Literatur meist mit dem Buchstaben μ bezeichnet.
2) SCHLAIFER (176), S. 227 f.
3) Vgl. BRIGHAM (29), S. 414 f.
4) MANGELSDORF (128), S. 267

Praktische Gründe legen es nahe, von einer Verteilungsfunktion von exponentieller Form auszugehen. Zum ersten wird die mathematische Behandlung der Planungsmodelle außerordentlich vereinfacht, da die Exponentialverteilung die einzige Verteilung mit "Markovcharakter" ist.[1] Das bedeutet eine Verteilung "ohne Gedächtnis", oder wie FELLER es ausdrückt "...endowed with complete lack of memory"[2], oder wie SAATY schreibt, mit "...the property of forgetfullness."[3]

Untersuchungen von FETTER[4] über den Einfluß der Bedienungszeitverteilung auf die Anzahl zu bedienender Maschinen haben zum anderen ergeben, daß "...the existing models are not particularly sensitive to deviations from the assumed service time distributions."[5] Die Untersuchungen von LEHMANN[6] bestätigen die Aussagen von FETTER. Schließlich wird man immer dann eine Exponentialverteilung wählen, wenn die Bedienungszeiten stark streuen, da sie, wie PALM bemerkt, "... eine gute statistische Beschreibung der ziemlich zufällig streuenden Bedienungszeiten" gibt.[7]

33. KHINTCHINE, der eine der ersten Arbeiten über stochastische Mehrstellenarbeit verfaßte, ging von einer P e a r s o n T y p III - V e r t e i l u n g der Bedienungszeiten aus[8]. Der Grund hierfür dürfte in der Tatsache begründet liegen, daß eine Menge von Verteilungen Pearsonsche Verteilungen sind[9]. Eine Verteilung, deren Dichtefunktion der Differentialgleichung

$$(3.16) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a + x}{b + cx + dx^2}\, y$$

mit den Konstanten a, b, c und d genügt, bezeichnet man als Pearsonsche Verteilung. Der Typ III der Pearsonschen Verteilung hat folgende

1) Vgl. hierzu z. B. MENGES (136), S. 169, sowie § 33
2) FELLER (49), S. 412
3) SAATY (172), S. 38
4) Vgl. FETTER (53), S. 27 ff.
5) MANGELSDORF (128), S. 267. Hierbei wurden die Modelle von ASHCROFT (5), PALM (153) und KHINTCHINE (101) untersucht.
6) Vgl. LEHMANN (121)
7) PALM (155), S. 286
8) Vgl. KHINTCHINE (101), S. 119-123
9) Z.B. Normalverteilung, Binomialverteilung, Poissonverteilung, Exponentialverteilung, Gamma-Verteilung, Beta-Verteilung, Studentsche Verteilung, -Verteilung, Cauchysche Verteilung. Vgl. hierzu CRAMER (36), S. 127-129; FRY (64), S. 244-251

Dichtefunktion.[1)]

$$y = c \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\gamma a} e^{-\gamma x} \qquad -a \leq x < \infty \tag{3.17}$$

Je nach eingehenden Parametern erhält man unterschiedliche graphische Darstellungen der Funktion[2)]. KHINTCHINE wählte in seiner Arbeit eine Pearson Typ III-Verteilung mit dem Variationskoeffizienten 0,5[3)].

34. Wegen der komplizierten Analyse wird heute die Pearson Typ III-Verteilung gerne durch eine zwei-parametrige Verallgemeinerung der Exponentialverteilung ersetzt, die als E r l a n g[4)] - K l a s s e v o n V e r t e i l u n g e n der Bedienungszeiten bezeichnet wird[5)]. Zur Ableitung[6)] dieser Klasse von Verteilungen betrachten wir einen Poisson-Prozeß mit dem Parameter v'. Für die Verteilung der Zeit t zwischen der Abfertigung zweier aufeinanderfolgender Einheiten gilt die Dichtefunktion (3.14), also

$$b(t) = v' e^{-v't} \qquad t > 0$$

Die Funktion b(t) kann auch als Dichtefunktion der Zeit bezeichnet werden, die von einem bestimmten Zeitpunkt an vergeht, bis mindestens e i n e Einheit abgefertigt ist. Wir schreiben deshalb

$$b_1(t) = v' e^{-v't} \qquad t > 0 \tag{3.18}$$

Die Dichtefunktion der Zeitdauer bis zur Abfertigung von mindestens k Einheiten lautet:

$$b_k(t) = \frac{v'^k \; t^{k-1}}{(k-1)\,!} \; e^{-v't} \qquad t > 0 \tag{3.19}$$

Sie hat den Erwartungswert

$$\bar{t} = \frac{k}{v'} \tag{3.20}$$

---

1) Vgl. hierzu PEARSON-HARTLEY (157), S. 79
2) Vgl. z.B. die Fig. 30 bei FRY (64), S. 250
3) Der Variations- oder Variabilitätskoeffizient ist wie folgt definiert

$$v = \frac{\text{Standardabweichung}}{\text{zugehöriger Mittelwert}}$$

Gelegentlich erfolgt eine Multiplikation mit 100, um Dezimalen zu vermeiden.
4) Nach E.K. ERLANG
5) Vgl. SASIENI-YASPAN-FRIEDMANN (169), S. 152 f.; SAATY (171), S. 334; COX-SMITH (35), S. 20 f.
6) Vgl. FÖRSTNER (58), S. 202 ff.

und die Standardabweichung

$$(3.21) \qquad s = \frac{\sqrt{k}}{v'} \qquad 1)$$

Bezeichnen wir mit E' die Ereignisse, die dem betrachteten Poisson-Prozeß entsprechen. Sie werden in der Reihenfolge ihres Erscheinens von einem gewissen Zeitpunkt an gezählt. Die Ereignisse E seien wie folgt definiert: E tritt im gleichen Zeitpunkt wie E' ein, dessen Nummer ein Vielfaches von k ist. Der die Ereignisse E bestimmende Prozeß wird "Erlang-Prozeß" genannt. Die Dichtefunktion der Zeitabstände zwischen den Ereignissen E ist durch (3.19) gegeben; die zugehörige Verteilungsfunktion wird Erlang-Verteilung genannt. Die Ankunftsrate der Ereignisse E ist demnach

$$(3.22) \qquad v = \frac{1}{\bar{t}} = \frac{v'}{k}$$

Der Zusammenhang zwischen E' und E ist in Abbildung 35 verdeutlicht.

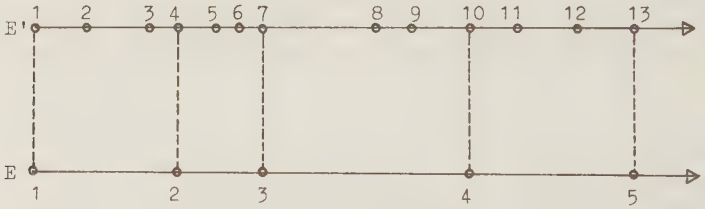


Abb.35: Erlang - Prozeß für k=3

Ersetzt man in (3.19) v' durch v · k, so erhält man:

$$(3.23) \qquad b_k(t) = \frac{(vk)^k \, t^{k-1}}{(k-1)!} \, e^{-vkt}$$

1) Die Streuung ist $s^2 = \frac{k}{v^2}$

die Dichtefunktion der Erlang-Verteilung. Die zugehörige Verteilungsfunktion lautet

$$B_k(t) = 1 - e^{-vkt} \cdot \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(vkt)^n}{n!} \tag{3.24}$$

Die zwei-parametrige Erlang-Klasse von Verteilungen hat eine Reihe besonderer Eigenschaften, die sowohl für die mathematische Behandlung der Planungsmodelle, als auch für die Wirklichkeitsnähe der Bedienungszeitverteilungen von Wichtigkeit sind:

a) Alle Verteilungsfunktionen der Klasse haben das gemeinsame Mittel

$$\frac{1}{v} \tag{3.25}$$

b) Das Maximum der Dichtefunktion, also der wahrscheinlichste Wert der Bedienungszeit einer Einheit, ist für beliebiges k

$$t = \frac{k - 1}{vk} \tag{3.26}$$

Für k = 1 erhält man also t = 0; für k = 2 erhält man 1/(2v); für k = 3 erhält man 2/(3v) usw. Für k = ∞ liegt das Maximum bei 1/v. Die Varianz (Streuung) für das k-te Glied ist $1/(kv^2)$. HIeraus ersieht man, daß für k = 1 die Erlang-Verteilung der Exponentialverteilung entspricht, und für k = ∞ der Fall konstanter Bedienungszeiten vorliegt.

Für die praktische Anwendung folgt: Jede beliebige Verteilungsfunktion der Bedienungszeiten kann angenähert durch eine Funktion aus der Erlang-Klasse der Verteilungen wiedergegeben werden. Jeder beliebige Variationskoeffizient zwischen Null und Eins ist somit erreichbar.

Die Funktion (3.23) ist in Abbildung 36 dargestellt.

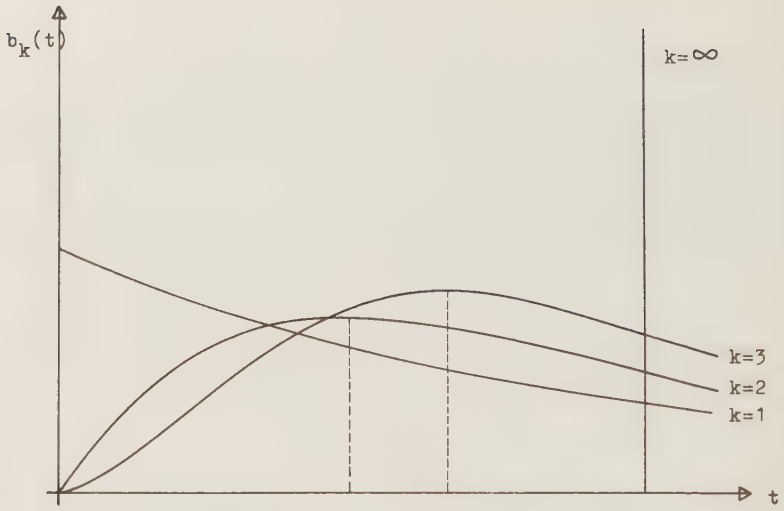


Abb.36: Bild der Funktion (3.23)

Die Erlang-Klase von Verteilungen der Bedienungszeiten gestattet eine Dekomposition in k Phasen, die sowoh von der mathematischen Analyse, als auch von der praktischen Anwendung her von Interesse ist. Wir stellen uns ein Bedienungssystem vor, bei dem eine Einheit k unabhängige Bedienungsphasen durchläuft. Solche Bedienungssysteme liegen beispielsweise bei Serienanordnung der Bedienungsstellen vor. (Abb. 37)

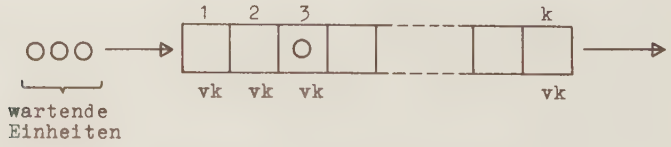


Abb.37: k-teiliger Phasenkanal

Liegt dieser Fall bei Mehrstellenarbeit tatsächlich nicht vor, so läßt sich auch die Gesamtbedienungszeit e i n e s Arbeiters in k Phasen zerlegt denken. Dazu stellt man sich die Gesamtbedienungszeit in k Teilzeiten aufgeteilt vor, die alle voneinander unabhängige Zufallsvariable x_1, x_2, ..., x_k sind und eine gemeinsame Exponentialverteilung mit dem Mittel $1/(vk)$ besitzen. Unter diesen Gegebenheiten ist auch die Zufallsvariable $x_1 + x_2 + \ldots + x_k$ der k-ten Erlang-Verteilung mit dem Parameter v verteilt.

Man kann nun zeigen, daß eine Dekomposition in k-Phasen erlaubt, einen Erlang-Prozeß auf einen markovschen Prozeß zurückzuführen, was die mathematische Behandlung erheblich erleichtert[1]. Im einzelnen sei hier jedoch nicht darauf eingegangen.

Zusammenfassung: Eine zwei-parametrige Verallgemeinerung der Exponentialverteilungen bildet die Erlang-Klasse von Verteilungen der Bedienungszeiten. Als Sonderfälle enthält diese Klasse die Exponentialverteilung der Bedienungszeiten ($k = 1$) und den Fall konstanter Bedienungszeiten ($k = \infty$). Empirisch ermittelte Verteilungsfunktionen lassen sich durch die Erlang-Verteilung durch geeignete Parameterwahl besonders gut annähern. Durch eine Dekomposition in Phasen ist eine Überführung in Markov-Prozesse möglich, was die mathematische Behandlung vereinfacht.

325 Die Systematik von D. G. KENDALL[2]

Eine Reihe von Autoren verwendet zur Beschreibung von Wartesystemen ein von D. G. KENDALL im Jahre 1953 eingeführtes System von Bezeichnungen. Es hat sich insbesondere zur Vermeidung langwieriger Beschreibungen von Wartesystemen bewährt, so daß wir die Kendall-Systematik hier kurz aufzeigen wollen, um sie später fallweise verwenden zu können.

In dieser Systematik werden folgende Kurzzeichen dazu benutzt, den Input-Prozeß, den Abfertigungsprozeß und die Zahl der Bedienungsstellen bei paralleler Anwendung zu beschreiben.

1) Vgl. KAUFMANN-CRUON (98), S. 25
2) Vgl. hierzu KENDALL (100), S. 338-341; BHARUCHA-REID (20), S. 376; FERSCHL (51), S. 50; FLETCHER-CLARKE (56), S. 156 f.; GALLIHER (65), S. 109

D Deterministisch oder regelmäßig, d. h. insbesondere konstante Bedienungszeit oder äquidistanter Input.

M Zufällig im allgemeinen poissonsch, d. h. exponentialverteilte Zwischenankunfts- oder Bedienungszeiten (Markov Eigenschaft)

E_k k-Erlang Verteilung für die Zwischenankunfts- oder Bedienungszeiten. $E_k = M$, wenn $k = 1$; $E_k = D$, wenn $k = \infty$

G Allgemeine Verteilung der Bedienungszeiten (General distribution)

GI Allgemeine Verteilung der Zwischenankunftszeiten (General Independent Input)

s Anzahl Servicestellen bei paralleler Anordnung

Weitere Systemcharakteristika, wie z. B. Serienanordnung, bestimmte Auswahlordnungen etc., werden verbal beschrieben. Mit Hilfe obiger Kurzzeichen kann ein spezielles Wartesystem dann wie folgt gekennzeichnet werden, z. B.

M M 1 bedeutet ein Wartesystem mit Poisson-Input, exponentieller Verteilung der Bedienungszeiten und einem Bedienungsarbeiter

M G 1 bedeutet ein Wartesystem mit Poisson-Input, allgemeiner Verteilung der Bedienungszeiten und einem Bedienungsarbeiter

M E_k s bedeutet ein Wartesystem mit Poisson-Input, k-Erlang Verteilung der Bedienungszeiten und s parallelen Servicestellen.

33 Mathematische Methoden der Warteschlangentheorie

331 Problematik

Das primäre Problem bei der Behandlung von Warteschlangenphänomenen ist die formelmäßige mathematische Erfassung des zeitlichen Verlaufs des Geschehens innerhalb eines Wartesystems.

Sehen wir von rein deterministischen Modellen ab, die ohne allzugroßen mathematischen Aufwand durch zum Teil recht elementare Rechenoperationen in ihrem zeitlichen Verlauf vorhergesagt werden können[1],

1) Vgl. hierzu die Ausführungen und das Modell im 4. Kapitel

so stellt sich bei rein- oder gemischt-stochastischen Modellen im Grunde stets folgendes Problem:

> Aus vorgegebenem Input- und Output-Prozeß sollen Aussagen über Zustände innerhalb des Systems gefolgert werden.

Dem stochastischen Ablauf des Geschehens entsprechend, sind diese Folgerungen Aussagen über die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens möglicher Zustände zu beliebiger Zeit.

Die wesentlichen mathematischen Voraussetzungen zur Lösung dieser Probleme sind demnach

- die Theorie der stochastischen Prozesse
- die Wahrscheinlichkeitsrechnung

und bei instationären oder allgemeinen Modellen

- die Theorie der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungssysteme und
- die Theorie der Integralgleichungssysteme.

332 Modelle mit Markov[1]-Eigenschaft

Viele in der Theorie vorkommende Warteschlangenmodelle stellen Markovprozesse dar oder werden in der entsprechenden Literatur - mehr oder minder hypothetisch - als solche betrachtet.

Markov-Prozesse sind spezielle stochastische Prozesse, die für die praktische Rechnung außerordentlich vereinfachende Eigenschaften haben:

> Aus der Kenntnis der gegenwärtigen Situation in einem Modell kann man Aussagen über zukünftige mögliche Ereignisse in ihm machen, o h n e das meist recht komplexe Geschehen in der Vergangenheit des Modells mit zu berücksichtigen, das zu der gegenwärtigen Situation hätte führen können.

In der Literatur wird deshalb der Markov-Prozeß sehr treffend als "Prozeß ohne Vergangenheit"[2] bezeichnet.

---

1) Nach dem Russen A. A. MARKOV (1856-1922)
2) Vgl. S. 117 dieser Arbeit

Einige Definitionen aus der Theorie der stochastischen Prozesse mögen obige Ausführungen verdeutlichen.

Stochastischer Prozeß[1] $\{X_t, t \in T\}$

Eine Menge von stochastischen Variablen X_t, die von einem Parameter t aus einer gewissen Parametermenge T abhängen, wird stochastischer Prozeß genannt.

Je nach Art der Parametermenge T unterscheidet man

- die stochastische Folge (Kette)
  für diskretes t
- den stochastischen Prozeß
  für kontinuierliches t

In den Modellen der Mehrstellenarbeit ist T das kontinuierlich durchlaufene Zeitintervall $[0,\infty)$ und X_t bezeichnet meistens die Anzahl der zur Zeit $t \in [0,\infty)$ stehenden Maschinen (Aggregate, Arbeitsstellen)
X_t gibt für $t \in T$ einen Zustand des Systems an.
Die

Zustandswahrscheinlichkeiten $p_n(t)$
des Systems sind demnach

$$(3.27) \qquad p_n(t) := p\,(X_t = n),$$

wobei $n \in [0, 1, 2, \ldots$ Anzahl der möglichen Zustände$]$

Die
Übergangswahrscheinlichkeiten p_{ij}^{v} $([t, t + \Delta t])$
geben die Wahrscheinlichkeit für einen Übergang des Systems vom Zustand i zum Zustand j im Intervall $[t, t + \Delta t]$ an. Im allgemeinen werden diese Wahrscheinlichkeiten von der Vergangenheit des Systems abhängen, was durch den zusätzlichen oberen Index v kenntlich gemacht werden soll.

$$(3.28) \quad p_{ij}^{v}([t, t + \Delta t]) := p\,(X_{t+\Delta t} = j \mid X_t = i \cap X_{t-\Delta t} = v_n \cap X_{t-2\Delta t} = v_{n-1} \cap \ldots \cap X_0 = v_0)$$

1) Vgl. FISZ (55), S. 228

Dabei sind $v_n, \ldots, v_1$ irgendwelche mögliche Zustände, die das System von Beginn bis zum Zeitpunkt t durchlaufen hat und die in t den Zustand i ermöglichen, v_0 ist der Anfangszustand.
Zu jeder möglichen - d.h. in t zum Zustand i führenden - Kombination von in der Vergangenheit möglichen Zuständen gehört eine im allgemeinen verschiedene Übergangswahrscheinlichkeit.

Markov-Prozeß

Ein stochastischer Prozeß wird Markov-Prozeß genannt, wenn die Übergangswahrscheinlichkeit n i c h t von der Vergangenheit des Systems, sondern nur von dem gegenwärtigen Zustand X_t und dem in Frage stehenden zukünftigen Zustand $X_{t+\Delta t}$ abhängen.

$$(3.29)\quad p\,(X_{t+\Delta t} = j \mid X_t = i \cap X_{t-\Delta t} = v_n \cap \ldots \cap X_0 = v_0)$$

$$= p\,(X_{t+\Delta t} = j \mid X_t = i) \qquad \text{für alle möglichen Zustände vor t}$$

$$:= p_{ij}\,([t,\ t+\Delta t])$$

Übergangsmatrix

Eine Anordnung der Übergangswahrscheinlichkeiten zu einer quadratischen Matrix bezeichnet man als Übergangsmatrix.

$$(3.30)\quad \mathfrak{A}([t,t+\Delta t]) = \begin{pmatrix} p_{00}([t,t+\Delta t]), & p_{01}(\ldots), & \ldots, & p_{0N}(\ldots) \\ p_{10}(\ldots), & p_{11}(\ldots), & \ldots, & p_{1N}(\ldots) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{k0}(\ldots), & p_{k1}(\ldots), & \ldots, & p_{kN}(\ldots) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{N0}(\ldots), & p_{N1}(\ldots), & \ldots, & p_{NN}(\ldots) \end{pmatrix}$$

wobei N: = Anzahl der möglichen Zustände, $k \leq N$.

Zustandsvektor

Einen Vektor, der als Komponenten die Zustandswahrscheinlichkeiten hat, nennt man Zustandsvektor.

(3.31) $p(t) := \left(p_0(t), p_1(t), \ldots, p_N(t)\right)$

333 Lösungsmethoden bei Markovschen Modellen

Der Verfasser möchte hier nur die wesentlichen Gedanken zur Lösung von Markov-Modellen aufzeigen, da diese Methoden in der Literatur oft und ausführlich behandelt werden.

Eingehender wollen wir die Lösungsmethoden bei allgemeinen Modellen beschreiben, da es darüber noch fast keine Literatur gibt.[1)]

Die Markov-Eigenschaft impliziert die stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen in fremden Zeitintervallen. Wegen dieser Eigenschaft gilt - wie man durch Ausmultiplizieren sofort verifiziert - folgende Gleichung:

(3.32) $p(t + \Delta t) = p(t) \cdot \mathfrak{A}\left([t, t + \Delta t]\right)$

Durch Umformungen dieser Gleichungen und durch anschließende Grenzwertbildung $\Delta t \longrightarrow 0$ erhält man ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem für die Zustandswahrscheinlichkeiten $p_n(t)$. In der Literatur wird dieses System oft "Geburten- und Todesgleichungen"genannt.

Dieses Differentialgleichungssystem für die $p_n(t)$ kann man lösen und man erhält die i n s t a t i o n ä r e n - d.h. von t abhängigen - Lösungen.
Als s t a t i o n ä r e - d.h. von t unabhängige - Lösungen bezeichnet man die Grenzwerte:

(3.33) $p_n := \lim_{t \longrightarrow \infty} p_n(t)$

s o f e r n sie existieren.

1) Vgl. Kapitel 335 und Kapitel 513

In der Literatur gibt es verschiedene Kriterien, die Aussagen über die Existenz einer stationären Lösung machen[1] ohne die effektive Kenntnis der instationären Lösung. (Diese ist nämlich meist schwierig zu finden) Weiß man - etwa durch Nachprüfen eines Kriteriums -, daß eine stationäre Lösung existiert, so kann diese aus den Geburten- und Todesgleichungen einfach bestimmt werden:

Durch Übergang vom von t unabhängigen Grenzwert folgt:

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = 0 \qquad \text{für alle } n \tag{3.34}$$

Das Differentialgleichungssystem für die $p_n(t)$ geht somit über in ein einfaches Gleichungssystem für die p_n, das ohne großen Aufwand meist rekursiv gelöst werden kann.

334 Allgemeine Modelle

Sind in einem Wartesystem In- und Output nicht durch s p e z i e l l e Prozesse gegeben, so spricht man von einem allgemeinen Modell.

In einem solchen Modell wird der Input-Prozeß durch beliebige, stetig differenzierbare Dichtefunktionen $f_j(x)$ für die stochastische Variable "Laufzeit der Maschine j" beschrieben. In gleicher Weise wird der Output-Prozeß durch beliebige, stetig differenzierbare Dichtefunktionen $r_j(x)$ für die Zufallsvariable "Bedienzeit der Maschine j" charakterisiert.[2]

335 Lösungsmethode bei allgemeinen Modellen[3]

Zur Bestimmung der Zustandswahrscheinlichkeiten $p_n(t)$ wird das Ereignis $\{$In t stehen n Maschinen$\}$ je nach möglichem Eintreffen in eine Vereinigung von f r e m d e n Ereignissen zerlegt, und zwar derart, daß die zweiseitige Implikation gilt:

---

1) Die Existenz dieser Grenzwerte kann auf verschiedene Arten nachgewiesen werden:
   a) durch Grenzwertbildung bei den instationären $p_n(t)$
   b) beim instationären Lösungs a n s a t z im Bildraum des Laplacetransformierten Differentialgleichungssystems durch Anwendung von Stabilitätskriterien (Vgl. BECKER (9), S. 98 ff.)
   c) durch Nachprüfen, ob gewisse Voraussetzungen in der Übergangsmatrix gegeben sind (Vgl. FISZ (55), S. 219-221)
2) Vgl. BECKER (9), S. 1-9
3) Dieses Kapitel ist ein Resümee der Arbeit von BECKER (9)

$$(3.35)\quad \left\{\text{In t stehen n Maschinen}\right\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \left\{ E_i^n\,(t) \right\} \quad 1)$$

wobei $$\left\{E_i^n\,(t)\right\} \cap \left\{E_j^n\,(t)\right\} = \emptyset \qquad i \neq j$$

Für die Wahrscheinlichkeiten gilt dann:

$$(3.36)\qquad p_n(t) = \sum_{i=1}^{k} p\left(E_i^n\,(t)\right)$$

Die $p\left(E_i^n\,(t)\right)$ kann man im allgemeinen Modell - bis auf wenige Ausnahmen - n i c h t d i r e k t berechnen.
Man führt deshalb zu ihrer i n d i r e k t e n Berechnung h y p o t h e t i s c h angenommene Dichten ein, die entsprechend integriert die in Frage stehende Wahrscheinlichkeit $p\left(E_i^n\,(t)\right)$ ausdrücken.

Das Problem dieses Modells ist nun
1. der Nachweis, daß es solche (eindeutigen) Dichten gibt, die den hypothetischen Forderungen, die a priori an sie gestellt werden, genügen; d.h. das Modell muß a posteriori von dem hypothetischen Charakter befreit werden, der a priori notwendig war, um überhaupt zu Ergebnissen zu gelangen,
2. die Berechnung der Dichten oder im Hinblick auf die Allgemeinheit des Problems das Aufzeigen von Verfahren zu ihrer Berechnung nach Einsetzen spezieller Dichten des Input- und Output-Prozesses.

Die Lösung dieser Probleme ist kompliziert und aufwendig, da alle vorkommenden möglichen Ereignisse detailliert zerlegt werden müssen, und zwar stets im Hinblick auf eine sinnvolle, d. h. zur Lösung des Problems führende Zerlegung.

Ausgehend von $\left\{E_i^n\,(t + \Delta t)\right\}$ wird die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses auf zwei Arten bestimmt:

1. Mit der zugehörigen hypothetisch angenommenen Dichte d i r e k t.
2. Durch Umformung und Zerlegung von $\left\{E_i^n\,(t + \Delta t)\right\}$ und durch Rückschluß auf $\left\{E_i^n\,(t)\right\}$ i n d i r e k t.

---

1) $E_i^n(t)$ ist ein mögliches Ereignis, das $\left\{\text{In t stehen n Machinen}\right\}$ impliziert. Die Vereinigung aller dieser $E_i^n(t)$ impliziert aber erst $\left\{\text{In t stehen n Maschinen}\right\}$.
$\left\{A\right\} \subset \left\{B\right\} \Longleftrightarrow$ Wenn $\left\{A\right\}$ eintritt, tritt auch $\left\{B\right\}$ ein.

Durch Gleichsetzung der beiden gefolgerten Terme und anschließende Grenzwertbildung $\Delta t \longrightarrow 0$ erhält man dann eine partielle Differentialgleichung[1] für die hypothetische Dichte von $\left\{ E_i^n (t) \right\}$.

Die partiellen Differentialgleichungen, die auf diese Weise zur Bestimmung der hypothetischen Dichten aus dem Modell gefolgert werden können, bestimmen diese jedoch noch nicht eindeutig. Da aber nur eindeutige Lösungen von Interesse sein können, müssen zusätzlich noch Randwerte[2] der hypothetischen Dichten bestimmt werden.

Ihre Bestimmung, die im Grunde nach derselben Methode wie die Bestimmung der partiellen Differentialgleichungen durchgeführt werden kann, bereitet die größten Schwierigkeiten und verlangt den meisten Aufwand[3].

Die so hergeleiteten Randwerte koppeln die partiellen Differentialgleichungen, so daß nun die Dichten Lösungen eines über Randwerte gekoppelten partiellen Differentialgleichungssystems sind.

Dieses System wird sodann durch Einarbeiten der Randwerte[4] in ein Integralgleichungssystem für die Dichten umgeformt. Dieses System kann, nachdem spezielle Dichten $f_j(x)$, $r_j(x)$ eingesetzt werden, etwa durch Iteration gelöst werden.

Für die hypothetischen Dichten muß dann noch nachgewiesen werden,

- daß sie eindeutig existieren[5]
- daß sie stetig differenzierbar sind[6] und
- daß sie wirkliche Dichten sind[7], d. h., daß die Summe der Zustandswahrscheinlichkeiten im Modell gleich Eins ist.

---

1) Vgl. BECKER (9), S. 10 ff.
2) Vgl. BECKER (9), S. 31 ff.
3) Vgl. BECKER (9), S. 31-74
4) Vgl. BECKER (9), S. 75 ff.
5) Vgl. BECKER (9), Anhang S. 1-12
6) Vgl. BECKER (9), Anhang S. 13-23
7) Vgl. BECKER (9), S. 97

4 MODELLE ZUR BESTIMMUNG OPTIMALER BEDIENUNGSSYSTEME BEI DETERMINISTISCHER MEHRSTELLENARBEIT

41 Die Bestimmung optimaler Bedienungssysteme als Teilproblem der Arbeitsablaufplanung

In Unternehmungen, in denen in Mehrstellenarbeit gefertigt wird, gehört die Bestimmung optimaler Bedienungssysteme zu den Planungsproblemen des Fertigungsbereichs, insbesondere zu den Aufgaben der Arbeitsablaufplanung. An mehreren Stellen dieser Arbeit wurde bereits darauf hingewiesen, daß das bei Mehrstellenarbeit auftretende Problem darin besteht, Personal- und Betriebsmittelkapazitäten unter dem Aspekt einer vorgegebenen Zielsetzung aufeinander abzustimmen.

Sind bei gegebener Betriebsmittelkapazität viele Bedienungsarbeiter verfügbar, dann werden hohe Wartezeiten afutreten. Sind umgekehr Personalkapazitäten kanpp, so wird der Fall eintreten, daß eine Maschine bei Beendigung der Bearbeitung eines Werkstücks nicht sofort bedient werden kann. Die Maschine wartet auf Bedienung; sie hat eine Brachzeit.

Beide Situationen sind für den Betrieb unerwünscht, da beide Arten von Leerzeiten Kosten bedingen. Brachzeiten verursachen in der Regel Energieverbrauch. Wartezeiten hingegen verursachen Löhne und sonstige Personalkosten.

Die Arbeitsablaufplanung hat also u. a. die Aufgabe, durch eine möglichst günstige Planung des Bedienungssystems einen Ausgleich dieser widerstreitenden Situationen zu suchen.

42 Die Methoden der Planung von Bedienungssystemen

Unsere Ausführungen im Kapitel 1431 haben gezeigt, daß bereits das Auffinden von Takt- und Zykluszeiten mit großen Schwierigkeiten und für das Unternehmen u.U. auch mit Kosten verbunden ist. In der P r a x i s ist man deshalb meist damit zufrieden, wenn man ein Bedienungssystem gefunden hat, das hohe Brachzeiten der Betriebsmittel vermeidet. Vielfach bestehen auch Regeln darüber, welche Arbeitsstellen mit Prioritäten bedient werden sollen. Im Kapitel 323 wurden einige Prioritätsregeln erwähnt. Alle diese Prioritätsvorschriften sind unseres Erachtens nur Unterziele, die es ermöglichen sollen, ein zulässiges Bedienungssystem zu finden, das dem Gesamtziel der Unternehmung möglichst nahekommt. Meist ist jedoch nicht bekannt, welche der verschiedenen Prio-

ritätsregeln in welcher konkreten betrieblichen Situation dem Gesamtziel am besten entsprechen.

In der Praxis bedient man sich bei der Planung von Bedienungssystemen mehr oder weniger systematischer Probierverfahren und visueller Hilfsmittel, wie etwa den Planungsbogen von Gantt[1]. Dieser Planungsbogen entspricht den bekannten Arbeitsschaubildern bzw. Arbeitsablaufdiagrammen (Vgl. z.B. Abb. 13-24)[2]. Die genannten Verfahren werden vielfach durch Multimomentaufnahmen und Maschinenschreiber überprüft und korrigiert. Man kann sagen, daß die in der Praxis angewandten Lösungsmethoden im wesentlichen empirischer Art sind, die kaum theoretisch begründet und gewöhnlich nur auf betriebsindividuelle Situationen anwendbar sind.

Die Schwierigkeiten, die einer Lösung unseres Problems unter allgemeinen Prämissen entgegenstehen, haben dazu geführt, daß in der L i t e r a t u r nur Lösungsansätze für spezielle Situationen entwickelt und dargestellt wurden. In der ausländischen Literatur findet man zumeist Ansätze, die sich ausschließlich mit den bei stochastischer Mehrstellenarbeit auftretenden Problemen befassen.

In einer exakten Lösung wird bei deterministischer Mehrstellenarbeit ausschließlich die von uns als Grundform 1 bezeichnete Form der Mehrstellenarbeit behandelt, meist allerdings auch nur insoweit, als eine für einen Arbeiter theoretisch zu bedienende Stellenzahl angegeben wird, bei der entweder Brach- oder Wartezeiten ein Minimum aufweisen. In Spezialfällen der Grundform 1 - wenn die Nutzungszeit ein ganzzahliges Vielfaches der Tätigkeitszeit darstellt - können Brach- und Wartezeiten ganz vermieden werden[3]. Für alle anderen Grundformen werden graphische Lösungsmethoden empfohlen[4].

Eine a l l g e m e i n e L ö s u n g des Problems, ein optimales Bedienungssystem für M Arbeitsstellen, n Arbeitsgegenstände ($n \leq M$) und A Arbeitskräfte ($A \leq M$) zu ermitteln, gibt es unseres Wissens noch nicht. Aus diesem Grund sah es der Verfasser als eine der Hauptaufga-

1) Vgl. Handbuch des Industrial Engineering (133), S. 74-96, hier S.77f.
2) Vgl. auch die auf S. 10 in Anm. 1 angegebene Literatur.
3) Vgl. DAMS (37), S. 27; EILON (45), S. 150-151; AUTORENKOLLEKTIV (6), S. 114
4) Vgl. z.B. Handbuch des Industrial Engineering (132), S. 125-174, hier S. 132 ff.; WINKEL (218), S. 27

ben dieser Arbeit an, ein allgemeines Modell zu entwickeln, das zumindest eine verbesserte Planung von Bedienungssystemen ermöglicht.

43 Beschreibung eines allgemeinen Modells zur Bestimmung von Arbeiter- und Betriebsmittelzeiten

431 Aufgabenstellung

Vor der Konstruktion eines Modells ist es erforderlich, die interessierende Aufgabenstellung zu formulieren und die Prämissen zu nennen, von denen man bei der Aufstellung des Modells auszugehen hat.

In den ökonomischen Kalkül zur Bestimmung eines optimalen Bedienungssystems gehen die Brach- und Nutzungszeiten der Betriebsmittel, sowie die Warte- und Tätigkeitszeiten der Arbeiter als Parameter ein. Diese Größen sollen durch das Modell bestimmt werden; es hat folgende Fragen zu beantworten:

a) Für das B e t r i e b s m i t t e l:
   Wieviele Zeiteinheiten einer fest vorgegebenen Planperiode sind Brach- bzw. Nutzungszeit, wenn festliegt, welche Maschinen mit welchen Aufträgen belegt sind und durch wieviel Arbeiter der Maschinenpark bedient wird?

Da im Extremfall alle Betriebsmittel von unterschiedlicher Art sind, müssen diese Angaben für jede Arbeitsstelle getrennt ermittelt werden. Sind die einzelnen Zeitkomponenten der Nutzungszeit - wie Haupt- und Nebenzeit - bekannt, so kann eine getrennte Ermittlung dieser beiden erfolgen.

b) Für den A r b e i t e r:
   Wieviele Zeiteinheiten einer fest vorgegebenen Planperiode sind Warte- bzw. Tätigkeitszeit, wenn Maschinenbelegung und Arbeiteranzahlen festliegen?

Auch hier erscheint es sinnvoll, diese Angaben für jeden Arbeiter getrennt zu ermitteln. Eine Aufspaltung der Tätigkeitszeit in ihre Komponenten kann nach Abschluß der Rechnung erfolgen.

Durch eine parametrische Variation der Arbeiterzahl kann der Verlauf der Brach- und Nutzungszeiten, sowie von Warte- und Tätigkeitszeiten konstruiert werden.

432 Grundlagen und Prämissen des Modells

Für das zu behandelnde Modell wurde folgender S a c h v e r h a l t zugrunde gelegt:

Gegeben sind M Betriebsmittel (Arbeitsstellen, Aggregate, Maschinen), die mit n ($n \leqslant M$) Aufträgen belegt sind. Verfahrenswahlprobleme sind vorab gelöst, d. h. es ist bekannt, welcher Auftrag (Arbeitsgegenstand, Werkstück, Produkt, Erzeugnis) auf welchem Aggregat bearbeitet wird. Im Extremfall ist jedes Betriebsmittel mit einem anderen Auftrag belegt. Der Betriebsmittelpark kann und darf aus heterogenen Aggregaten bestehen. Er wird von einer gewissen Anzahl A von Arbeitern ($A \leqslant M$) bedient. Bezüglich des Einsatzes von Bedienungspersonal auf eine gegebene Anzahl von Arbeitsstellen sind nun zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Der gesamte Betriebsmittelpark wird von A Arbeitern gemeinsam bedient. Eine Bedienung anfordernde Maschine wird jedoch nur von e i n e m Arbeiter bedient.
2. Der gesamte Betriebsmittelpark wird so auf A Arbeiter aufgeteilt, daß jeder Arbeiter einen Teilbereich allein betreut.

Im zweiten Fall ergeben sich zwei zu lösende Probleme:

- Von wieviel Arbeitern soll der Betriebsmittelpark bedient werden oder, was das gleiche bedeutet, in wieviele Teilbereiche soll der Betriebsmittelpark aufgeteilt werden?
- Wie sollen die Arbeitsstellen bei gegebener Zahl der Teilbereiche auf diese aufgeteilt werden?

Die exakte Lösung allein dieser zweiten Frage führt auf ein kombinatorisches Problem; insgesamt sind nämlich $(M!)^A$ Zuordnungen möglich und zulässig. Da die mögliche Zahl der Zuordnungen schon bei kleinen Werten von M und A riesige Rechenoperationen erforderlich machen würde, scheidet der oben genannte zweite Fall des Einsatzes von Bedienungspersonal für die weiteren Untersuchungen aus, da keine Optimierungsverfahren zur Verfügung stehen. Im folgenden wird also nur der erste Fall betrachtet.

Die Analyse der Beziehungen zwischen Arbeiter- und Betriebsmittelzeiten im Kapitel 143 hat gezeigt, daß in allen Fällen der Arbeitsablauf durch die Folgen einander abwechselnder

- Brach- und Nutzungszeiten beim Betriebsmittel
- Warte- und Tätigkeitszeiten beim Arbeiter

bestimmt wird. Zusammen mit der Tatsache, daß bei deterministischer Mehrstellenarbeit Nutzungs- und Tätigkeitszeiten ex definitione konstant und im voraus bekannt sind, erlaubt diese Gesetzmäßigkeit den gesamten Arbeitsablauf im voraus exakt zu planen.

Das Planungsmodell geht von folgenden Überlegungen und P r ä m i s s e n aus:

1. Der Arbeitsablauf wird bestimmt durch die Folgen von Taktzeiten
   a) für den Arbeiter
   b) für das Betriebsmittel
2. Der Arbeitstakt des Arbeiters setzt sich aus Wartezeit, deren Zeitwert größer oder gleich Null ist, und einer konstanten Tätigkeitszeit zusammen.
3. Der Arbeitstakt des Betriebsmittels setzt sich aus Brachzeit, deren Zeitwert größer oder gleich Null ist, und einer konstanten Nutzungszeit zusammen.
4. Die Tätigkeitszeit an einem Betriebsmittel vollzieht sich innerhalb der Nutzungszeit.
5. Nutzungs- und Tätigkeitszeiten dürfen nicht unterbrochen werden.
6. Positive Brachzeiten entstehen dann, wenn nach abgelaufener Nutzungszeit kein Arbeiter verfügbar ist.
7. Positive Wartezeiten entstehen dann, wenn nach vollzogener Tätigkeit keine Maschine Bedienung anfordert, d. h. alle Maschinen laufen.
8. Eine Bedienung ist sobald wie möglich zu beginnen bzw. eine Maschine darf nie warten, sofern noch ein Arbeiter verfügbar ist.
9. Die Auswahlordnung bestimmt,
   a) in welcher Reihenfolge die Maschinen bedient werden
   b) wie zu verfahren ist, wenn mehrere Maschinen gleichzeitig brachliegen
   c) in welcher Reihenfolge die Arbeiter zum Einsatz gelangen
   d) wie zu verfahren ist, wenn mehrere Arbeiter gleichzeitig warten.

Im Modell haben wir folgende Auswahlordnung getroffen: Die Betriebsmittel und Arbeiter sind mit Eins beginnend fortlaufend indiziert. Wel-

ches Betriebsmittel dabei den Index 1, 2, ..., M erhält, soll hier noch nicht erörtert werden. Da die Arbeiter gleich qualifiziert sein sollen, ist hier die Reihenfolge der Numerierung ohne Bedeutung. Die Reihenfolge der Bedienung der Maschinen erfolgt nach ihrer Indizierung mit Eins beginnend. Warten mehrere Maschinen gleichzeitig auf Bedienung, so wird die Maschine mit dem jeweils niedrigsten Index zuerst bedient, dann die Maschine mit dem nächstfolgenden Index usw. Entsprechend wird mit den Arbeitern verfahren. Die wartenden Arbeiter mit dem niedrigsten Index kommen jeweils zuerst zum Einsatz.

Die Schwierigkeiten der Modellkonstruktion bestanden nun darin, die an den einzelnen Betriebsmitteln parallel ablaufenden Vorgänge in Kombination mit den Bedienungsarbeitern zu synchronisieren. Hierzu erwies sich die Zerlegung in Arbeitstakte für j e d e Maschine und j e d e n Arbeiter als sinnvoll.

Bei dem B e t r i e b s m i t t e l ergibt sich die Aufeinanderfolge von Brachzeit und Nutzungszeit. Dabei kann die Brachzeit Null sein. Die Nutzungszeit ist ex definitione positiv. In welcher Weise sind nun die einzelnen Arbeitstakte an den einzelnen Maschinen zu ermitteln?

Angenommen die Endzeitpunkte der ersten Arbeitstakte von vier zu bedienenden Maschinen sind bekannt; sie seien mit T_{Ms} bezeichnet, wobei s den Index der Maschine angibt, z. B.

s	T_{Ms}
1	7
2	6
3	0
4	0

Ebenso seien die Endzeitpunkte der ersten Arbeitstakte der zwei Arbeiter bekannt, die diese vier Maschinen bedienen; sie seien mit T_{Ar} bezeichnet, wobei r den Index des Arbeiters angibt, z.B.

r	T_{Ar}
1	3
2	2

Aus dem Zahlenbeispiel geht hervor, daß der früheste Zeitpunkt, an dem ein Arbeiter verfügbar ist, t = 2 ist. Im Zeitpunkt t = 2 warten

Maschine	Zeiteinheiten
1	0
2	0
3	2
4	2

Aufgrund der Auswahlordnung wird also Maschine 3 durch Arbeiter 2 bedient. Das bedeutet somit für die Berechnung des Endzeitpunktes des neuen Arbeitstaktes für die dritte Maschine

$$T_{M3}(\text{neu}) = T_{M3}(\text{alt}) + \text{Brachzeit} + \text{Nutzungszeit}$$

Beträgt die Nutzungszeit beispielsweise 10 (ZE), so ergibt sich für $T_{M3}(\text{neu}) = 0 + 2 + 10 = 12$

In entsprechender Weise werden die Arbeitstakte der A r b e i t e r berechnet. HIer ergibt sich ja immer eine Aufeinanderfolge von Wartezeit und Tätigkeitszeit. Die Wartezeit darf den Zeitwert Null annehmen. Die Tätigkeitszeit ist immer positiv. Um auch hier die Berechnungsweise kurz zu erläutern, sei von folgenden Zahlenwerten ausgegangen.

s	T_{Ms}
1	21
2	18
3	22
4	20

r	T_{Ar}
1	17
2	17

Der früheste Zeitpunkt, an dem eine Maschine Bedienung anfordert, ist t = 18 (Maschine 2). Gemäß Auswahlordnung wird diese Maschine durch Arbeiter 1 bedient, der bis zu diesem Zeitpunkt eine Zeiteinheit wartet. Beträgt die Nutzungszeit dieser Maschine 6 (ZE) und die Tätigkeitszeit 2 (ZE), so erhält man folgende neue Endzeitpunkte:

a) für das Betriebsmittel

$$T_{M2}(\text{neu}) = 18 + 0 + 6 = 24$$

b) für den Arbeiter

$$T_{A1}(\text{neu}) = T_{A1}(\text{alt}) + \text{Wartezeit} + \text{Tätigkeitszeit}$$

$$T_{A1}(\text{neu}) = 17 + 1 + 2 = 20$$

Im Arbeitsablaufdiagramm der Abbildung 38 haben wir diesen Sachverhalt nochmals verdeutlicht.

Um für eine fest vorgegebene Planungsperiode den Arbeitsablauf durch Aneinanderreihung von Taktzeiten vollständig beschreiben zu können, müssen noch Annahmen über den ersten bzw. letzten Arbeitstakt getroffen werden.

Aus Gründen der einfacheren Handhabung des Planungsvorgangs wurde für den A n f a n g s z u s t a n d angenommen, daß zu Beginn der Planungsperiode alle Betriebsmittel stillstehen und Bedienung erfordern. In der betrieblichen Praxis dürfte dieser Sachverhalt auch vielfach gegeben sein. Bei genügend langer Planungsperiode wird diese Prämisse auch nicht mehr schwer wiegen.

Gemäß der Prämisse über den Anfangszustand wäre es nur sinnvoll, für die Endphase anzunehmen, daß gewisse Maschinen mit ihren Nutzungszeiten über das Ende der Planperiode hinausreichen. Damit wäre sichergestellt, daß ein noch in der Planungsperiode begonnener Arbeitstakt auch zu Ende geführt wird. Um jedoch die Zeitkenngrade aller Maschinen und Arbeiter vergleichen zu können, muß für alle Betriebsmittel und Arbeiter die gleiche Planungsperiode zugrunde liegen. Im Modell wurde deshalb wie folgt verfahren: Die E n d p h a s e endet immer mit einem vollständigen Arbeitstakt. Der Planungsvorgang wird abgebrochen, wenn der Endzeitpunkt eines Arbeitstaktes größer oder gleich dem Endzeitpunkt der Planungsperiode ist. Danach wird eine Korrektur in der Weise durchgeführt, daß ein Zeitabschlag in Höhe des Zeitwertes, der über die Planperiode hinausreicht, vorgenommen wird. Zeitzuschläge am Ende der Planperiode müssen für den Fall erfolgen, daß entweder Maschinen nicht bedient werden können, weil die (letzten) Arbeitstakte der Arbeiter bereits über die Planperiode hinausreichen oder Arbeiter nicht mehr tätig werden können, weil die Arbeitstakte der Betriebsmittel erst nach der Planperiode enden. Im einzelnen wird dies bei der Formulierung des Modells im nächsten Kapitel deutlich gemacht.

433 Formulierung des Modells

1. In das Modell gehen als P a r a m e t e r ein:

M	Fest vorgegebene Anzahl der zu bedienenden Arbeitsstellen
A	Anzahl der eingesetzten Bedienungsarbeiter
S	Länge der Planungsperiode (ZE)
t_{Ns}	Nutzungszeit (ZE/ME) eines Arbeitsgegenstandes, der auf dem Betriebsmittel s = 1, 2, ..., M bearbeitet wird.
$t_{ts}^{(\nu)}$	Tätigkeitszeit (ZE/ME) eines Arbeitsgegenstandes, der auf dem

Betriebsmittel s = 1, 2, ..., M während des Arbeitstaktes τ bearbeitet wird.

Das Modell berechnet die Brach- und Nutzungszeiten einer jeden Arbeitsstelle durch Summation dieser Zeiten aus allen Arbeitstakten einer Planperiode. Es berechnet ferner die Warte- und Tätigkeitszeiten eines jeden Arbeiters durch Summation dieser Zeiten aus allen Arbeitstakten einer Planperiode.

Zur formelmäßigen Darstellung werden noch folgende Bezeichnungen benötigt:

τ_s	Index: Arbeitstakt Betriebsmittel	$\tau_s = 1, 2, \ldots, z_s$
τ_r	Index: Arbeitstakt Arbeiter	$\tau_r = 1, 2, \ldots, z_r$
τ'_s	Index für den jeweils letzten (aktuellen) Arbeitstakt der Arbeitsstelle s	
τ'_r	Index für den jeweils letzten (aktuellen) Arbeitstakt des Arbeiters r	
r	Index: Arbeiter	r = 1, 2, ..., A
$T_{Ms}^{(\tau_s)}$	Endzeitpunkt des Arbeitstaktes τ_s am Betriebsmittel s	
$T_{Ar}^{(\tau_r)}$	Endzeitpunkt des Arbeitstaktes τ_r des Arbeiters r	
$D_s^{(\tau_s)}$	Brachzeit des Aggregates s innerhalb des Arbeitstaktes τ_s	
$D_r^{(\tau_r)}$	Wartezeit des Arbeiters r innerhalb des Arbeitstaktes τ_r	

Aufgrund des angegebenen Sachverhalts und der gesetzten Prämissen läßt sich folgender P l a n u n g s a b l a u f angeben:

(1) Anfangszustand: Alle Betriebsmittel stehen und erfordern Bedienung. Alle Arbeiter sind einsatzbereit.

(4.1) $T_{Ms}^{(0)} := 0$ s = 1, 2, ..., M

(4.2) $T_{Ar}^{(0)} := 0$ r = 1, 2, ..., A

(2) Auswahlordnung: Im zweiten Schritt wird die als nächste zu bedienende Maschine und der als nächster tätig werdende Arbeiter ermittelt. Es wird wie folgt verfahren:

a) Suche den kleinsten Wert aus der Menge aller $T_{Ms}^{(\mu_s)}$

(4.3) $$\min_{s=1,\ldots,M} \left(T_{Ms}^{(\mu_s)} \right)$$

Sind mehrere kleinste Werte vorhanden, so wird dasjenige $T_{Ms}^{(\mu_s)}$ ausgewählt, das den kleinsten Index hat.

(4.4) $$\min (s)$$

b) Suche den kleinsten Wert aus der Menge aller $T_{Ar}^{(\mu_r)}$

(4.5) $$\min_{r=1,\ldots,A} \left(T_{Ar}^{(\mu_r)} \right)$$

Sind mehrere kleinste Werte vorhanden, so wird dasjenige $T_{Ar}^{(\mu_r)}$ ausgewählt, das den kleinsten Index hat.

(4.6) $$\min (r)$$

(3) Berechnung der Leerzeiten: Für das Entstehen von Brach- oder Wartezeiten ist folgender Sachverhalt verantwortlich:

a) Ist $\min T_{Ar}^{(\mu_r)} > \min T_{Ms}^{(\mu_s)}$, so entstehen B r a c h z e i t e n, da $\min T_{Ar}^{(\mu_r)}$ der früheste Zeitpunkt ist, ab dem der r.te Arbeiter verfügbar ist. Oder mit anderen Worten:

Bis mindestens zum Zeitpunkt $\min T_{Ar}^{(\mu_r)}$ sind alle Arbeiter tätig.

b) Ist $\min T_{Ar}^{(\mu_r)} < \min T_{Ms}^{(\mu_s)}$, so entstehen W a r t e z e i t e n, da $\min T_{Ms}^{(\mu_s)}$ der früheste Zeitpunkt ist, zu dem das Aggregat s Bedienung anfordert; oder: bis mindestens zum Zeitpunkt $\min T_{Ms}^{(\mu_s)}$ laufen alle Maschinen.

c) Ist $\min T_{Ar}^{(\mu_r)} = \min T_{Ms}^{(\mu_s)}$, so entsteht weder für die Maschine s eine Brachzeit noch für Arbeiter r eine Wartezeit, da unmittelbar im Zeitpunkt $\min T_{Ms}^{(\mu_s)}$ mit der Bedienung der Maschine begonnen werden kann.

Die Berechnung der Leerzeiten gestaltet sich wie folgt:

Bestimme das Maximum der nach (4.3), (4.4) und (4.5), (4.6) gefundenen Zeitpunkte

$$(4.7)\quad \text{Max}\left(\text{Min } T_{Ms}^{(\mu_s)},\ \text{Min } T_{Ar}^{(\mu_r)}\right) := \text{Min } (T)$$

und prüfe, ob

$$(4.8)\qquad \text{Min } T_{Ar}^{(\mu_r)} \gtrless \text{Min } T_{Ms}^{(\mu_s)}$$

(a) Berechnung der Brachzeit

Ist das Minimum des Endzeitpunkts des aktuellen letzten Arbeitstaktes des als nächstem zum Einsatz kommenden Arbeiters g r ö ß e r oder gleich dem Minimum des Endzeitpunktes des aktuellen letzten Arbeitstaktes der als nächsten zu bedienenden Maschine, so erhält man als Brachzeit dieser Maschine s

$$(4.9)\qquad \text{Min } (T) - T_{Ms}^{(\mu_s)} = D_s^{(\mu_s+1)}$$

Diese Brachzeit wird dem nächst folgenden Arbeitstakt μ_s+1 zugerechnet.

(b) Berechnung der Wartezeit

Ist das Minimum des Endzeitpunkts des aktuellen letzten Arbeitstaktes des als nächstem zum Einsatz kommenden Arbeiters k l e i n e r oder gleich dem Minimum des Endzeitpunktes des aktuellen letzten Arbeitstaktes der als nächsten zu bestimmenden Maschine, so erhält man als Wartezeit für diesen Arbeiter r

$$(4.10)\qquad \text{Min } (T) - T_{Ar}^{(\mu_r)} = D_r^{(\mu_r+1)}$$

Diese Wartezeit wird dem nächst folgenden Arbeitstakt μ_r+1 zugerechnet.

(4) Ermittlung der Endzeitpunkte der neuen Arbeitstakte

a) für die Maschine

$$(4.11)\qquad T_{Ms}^{(\mu_s+1)} = T_{Ms}^{(\mu_s)} + D_s^{(\mu_s+1)} + t_{Ns}$$

b) für den Arbeiter

$$T_{Ar}^{(\mu_r+1)} = T_{Ar}^{(\mu_r)} + D_r^{(\mu_r+1)} + t_{ts}^{(\mu_r+1)} \tag{4.12}$$

(5) Ermittlung neuer Arbeitstakte?

Nach Berechnung der neuen Endzeitpunkte für die Arbeitstakte der Arbeiter und Arbeitsstellen muß geprüft werden, ob die Planungsperiode bereits ausgeschöpft ist. Hierzu prüft man, ob

$$T_{Ms}^{(\mu_s)} - S \geqslant 0 \quad ^{1)} \qquad s = 1, \ldots, M \tag{4.13.1}$$

und

$$T_{Ar}^{(\mu_r)} - S \geqslant 0 \quad ^{1)} \qquad r = 1, \ldots, A \tag{4.13.2}$$

Ist die Differenz p o s i t i v, so bedeutet dies, daß der Arbeitstakt des betreffenden Arbeiters r bzw. der betreffenden Maschine s bereits über die Planperiode S hinaus dauert. Für diese Arbeiter und Maschinen ist der Vorgang der Berechnung neuer Arbeitstakte abzubrechen. Ist die Differenz gerade N u l l, so fallen die Endzeitpunkte der Arbeitstakte genau mit dem Ende der Planperiode zusammen. Auch hier ist der Vorgang der Berechnung neuer Arbeitstakte abzubrechen.

Sind für einige oder alle Maschinen und Arbeiter die Differenzen n e g a t i v, so wird ein neuer Arbeitstakt für diese berechnet.

(6) Ende des Planungsablaufs: Der Vorgang der Berechnung von Arbeitstakten ist beendet, wenn entweder alle Differenzen (4.13.1) oder (4.13.2) nicht negativ sind.

(7) Berechnung der Zeitsummen für die Planungsperiode: Nach Ende des Planungsablaufs werden getrennt für jede Arbeitsstelle und für jeden Arbeiter die angefallenen Teilzeiten in den einzelnen Arbeitstakten aufsummiert.

(a) für den Arbeiter:

$$\sum_{\nu_r=1}^{z_r} D_r^{(\nu_r)} := T_{wr} \qquad r = 1, \ldots, A \tag{4.14}$$

---

1) μ_s und μ_r bezeichnen hier wieder den Endzeitpunkt des aktuellen l e t z t e n Arbeitstaktes

$$(4.15) \qquad \sum_{\gamma_r=1}^{z_r} t_{ts}^{(\gamma_r)} := T_{tr} \qquad r = 1, \ldots, A$$

(b) für die Arbeitsstelle:

$$(4.16) \qquad \sum_{\gamma_s=1}^{z_s} D_s^{(\gamma_s)} := T_{Bas} \qquad s = 1, \ldots, M$$

Da die Nutzungszeit an einer Stelle s in jedem Arbeitstakt die gleiche ist, kann anstelle der Summe aller Nutzungszeiten das Produkt: "Anzahl Arbeitstakte x Nutzungszeit" treten.

$$(4.17) \qquad z_s \cdot t_{Ns} := T_{Ns} \qquad s = 1, \ldots, M$$

(8) Korrektur der Zeitsummen: Im Idealfall, wenn $T_{Ms}^{(z_s)} = S$ ($s = 1, 2, \ldots, M$) und $T_{Ar}^{(z_r)} = S$ ($r = 1, 2, \ldots, A$), ergeben die Summen

$$(4.18) \qquad T_{wr} + T_{tr} = S \qquad r = 1, \ldots, A$$

und

$$(4.19) \qquad T_{Bas} + T_{Ns} = S \qquad s = 1, \ldots, M$$

In der Regel wird jedoch einer der beiden folgenden Fällen eintreten:

(a) Die Differenzen (4.13.2) sind alle positiv und einige oder alle der Differenzen (4.13.1) sind negativ, d. h. alle Arbeiter sind bis über das Ende der Planperiode hinaus tätig, einige oder alle Maschinen warten bereits seit einem Zeitpunkt vor Ende der Planperiode auf Bedienung. In diesem Fall ist die Summe der Brachzeiten T_{Bas} für diese Maschinen zu gering und es hat eine Korrektur in Höhe von $(s - T_{Ms}^{(z_s)})$ für die Maschinen zu erfolgen, für die gilt $T_{Ms}^{(z_s)} < S$. Sind jedoch einige $T_{Ms}^{(z_s)} > S$, so müssen wegen der Prämisse einer gleich langen Planungsperiode für alle Maschinen die Summen der Nutzungszeiten um den Betrag $(T_{Ms}^{(z_s)} - S)$ verringert werden.

(b) Die Differenzen (4.13.1) sind alle positiv und einige oder alle

der Differenzen (4.13.2) sind negativ. Das bedeutet: alle Arbeitsstellen beenden ihren Arbeitstakt erst nach Ende der Planperiode; einige oder alle Arbeiter sind bereits vorher untätig. In diesem Fall ist die Summe der Wartezeiten dieser Arbeiter zu gering. Sie muß um den Korrekturfaktor $(S - T_{Ar}^{(z_r)})$ erhöht werden. Sind einige $T_{Ar}^{(z_f)} > S$, so müssen die Summen der Tätigkeitszeiten um den Betrag $(T_{Ar}^{(z_r)} - S)$ vermindert werden.

(c) Sind sowohl die Differenzen (4.13.1) als auch die Differenzen (4.13.2) positiv, so müssen die Summen der Nutzungszeiten als auch die Summen der Tätigkeitszeiten entsprechend korrigiert werden.

(9) Berechnung von Zeitkenngraden: Nach Durchführung der Korrekturen gilt für alle Zeitsummen (4.20) und (4.21). Bezieht man die Teilzeitsummen T_{wr}, T_{tr}, T_{Bas} und T_{Ns} auf die Planperiode S und multipliziert mit 100, so erhält man den prozentualen Anteil dieser Zeiten an der Planperiode.

2. Zur Erläuterung des Planungsablaufs sei ein kurzes Z a h l e n b e i s p i e l gegeben.

P a r a m e t e r:

Anzahl Arbeitsstellen		M = 4		
Anzahl Bedienungsarbeiter		A = 2		
Planperiode		S = 25		
Maschine s	A_1	B_2	C_3	D_4
Nutzungszeit t_{Ns}	7	6	10	4
Tätigkeitszeit t_{ts}	3	2	4	1

Nach (4.1) und (4.2) gilt:

$$T_{M1}^{(0)} = T_{M2}^{(0)} = T_{M3}^{(0)} = T_{M4}^{(0)} = 0$$

und

$$T_{A1}^{(0)} = T_{A2}^{(0)} = 0$$

Da zwei Arbeiter vorhanden sind, kann mit der Bedienung von Maschine A_1 und Maschine B_2 gleichzeitig begonnen werden. Gemäß Auswahlordnung beginnt Arbeiter 1 mit der Bedienung von Maschine A_1 und Arbeiter 2 mit der Bedienung von Maschine B_2. Brach- und Wartezeiten fallen keine an. Demzufolge ergibt sich für $T_{M1}^{(1)} = 7$ und $T_{M2}^{(1)} = 6$; entsprechend für die Arbeiter $T_{A1}^{(1)} = 3$ und $T_{A2}^{(1)} = 2$. Diese Werte wurden in Tabelle 11 eingetragen.

Die Tabelle 11 ist wie folgt aufgebaut:

a) <u>für das Betriebsmittel:</u>

Spalte 1: Laufender Index des Arbeitstaktes

Spalte 2: Nummer des Arbeiters, der die Maschine im jeweiligen Arbeitstakt bedient.

Spalte 3: Brachzeit des Betriebsmittels im jeweiligen Arbeitstakt

Spalte 4: Nutzungszeit des Betriebsmittels im jeweiligen Arbeitstakt

Spalte 5: Endzeitpunkt eines jeden Arbeitstaktes

b) <u>für den Arbeiter:</u>

Spalte 1: Laufender Index des Arbeitstaktes

Spalte 2: Nummer der Maschine, die von dem Arbeiter im jeweiligen Arbeitstakt bedient wird.

Spalte 3: Wartezeit des Arbeiters im jeweiligen Arbeitstakt

Spalte 4: Tätigkeitszeit des Arbeiters an der Maschine s im jeweiligen Arbeitstakt

Spalte 5: Endzeitpunkt eines jeden Arbeitstaktes

Es erfolgt die Auswahl der als nächste zu bedienenden Maschine: Nach (4.3) und (4.4) ergibt sich $T_{M3}^{(0)} = 0$. Nach (4.5) erhält man $T_{A2}^{(1)} = 2$. Nach (4.7) ergibt sich Min (T) = 2. Da $T_{A2}^{(1)} > T_{M3}^{(0)}$ bedeutet dies Brachzeiten für noch zu ermittelnde Maschinen.

(4.9) liefert:

$$\text{Min (T)} - T_{M1}^{(1)} = -5$$

$$\text{Min (T)} - T_{M2}^{(1)} = -4$$

$$\text{Min (T)} - T_{M3}^{(0)} = +2$$

Negative Werte bedeuten: die betreffenden Maschinen laufen noch (Maschine A_1 und B_2). Nicht negative Werte sind Brachzeiten der betreffenden Maschinen. In diesem Fall hat also Maschine C_3 eine Brachzeit von 2 (ZE). Für $T_{M3}^{(1)}$ erhält man somit:

Aggregat 1					Aggregat 2					Aggregat 3					Aggregat 4					Arbeiter 1					Arbeiter 2				
ν	r	$D_1^{(\nu)}$	$t_{N1}^{(\nu)}$	$T_{M1}^{(\nu)}$	ν	r	$D_2^{(\nu)}$	$t_{N2}^{(\nu)}$	$T_{M2}^{(\nu)}$	ν	r	$D_3^{(\nu)}$	$t_{N3}^{(\nu)}$	$T_{M3}^{(\nu)}$	ν	r	$D_4^{(\nu)}$	$t_{N4}^{(\nu)}$	$T_{M4}^{(\nu)}$	ν	s	$D_1^{(\nu)}$	$t_{ts}^{(\nu)}$	$T_{A1}^{(\nu)}$	ν	s	$D_2^{(\nu)}$	$t_{ts}^{(\nu)}$	$T_{A2}^{(\nu)}$
0	-	-	-	0	0	-	-	-	0	0	-	-	-	0	0	-	-	-	0	0	-	-	-	0	0	-	-	-	0
1	1	0	7	7	1	2	0	6	6											1	1	0	3	3	1	2	0	2	2
										1	2	2	10	12	1	1	3	4	7	2	4	0	1	4	2	3	0	4	6
2	2	0	7	14	2	1	0	6	12											3	2	2	2	8	3	1	1	3	10
										2	2	0	10	22	2	1	1	4	12	4	4	0	1	9	4	3	2	4	16
					3	1	0	6	18						3	2	4	4	20	5	2	3	2	14	5	4	0	1	17
3	1	0	7	21						3	2	0	10	32 *						6	1	0	3	17	6	3	5	4	26 *
					4	1	0	6	24											7	2	1	2	20					
															4	1	0	4	24	8	4	0	1	21					
4	1	0	7	28 *																9	1	0	3	24					
					5	1	0	6	30 *											10	2	0	2	26 *					
Su.		0	28	28			0	30	30			2	30	32			8	16	24			6	20	26			8	18	26
Korr.			- 3	- 3				- 5	- 5				- 7	- 7			+ 1		+ 1				- 1	- 1				- 1	- 1
End.		0	25	25			0	25	25			2	23	25			9	16	25			6	19	25			8	17	25
Proz.		0	100	100			0	100	100			8	92	100			36	64	100			24	76	100			32	68	100

Anm.: * Planungsablauf abbrechen

Tab. 11: Zahlenbeispiel zum allgemeinen Modell: Deterministische Mehrstellenarbeit

$0 + 2 + 10 = 12$ und für $T_{A2}^{(2)} = 2 + 0 + 4 = 6$.

Welche Maschine wird jetzt als vierte bedient? Das Minimum aller $T_{Ms}^{(\mu_s)}$ liefert $T_{M4}^{(0)} = 0$ und entsprechend für die Arbeiter $T_{A1}^{(1)} = 3$. Da alle $T_{Ms}^{(1)}$ $(s = 1, 2, 3) > T_{A1}^{(1)}$ bedeutet dies 3 Zeiteinheiten Brachzeit für Maschine D_4. Für $T_{M4}^{(1)}$ ergibt sich somit: $0 + 3 + 4 = 7$ und für $T_{A1}^{(2)}$: $3 + 0 + 1 = 4$. Die aktuellen letzten Endzeitpunkte der einzelnen Arbeitstakte lauten jetzt:

$$T_{M1}^{(1)} = 7 \qquad T_{A1}^{(2)} = 4$$

$$T_{M2}^{(1)} = 6 \qquad T_{A2}^{(2)} = 6$$

$$T_{M3}^{(1)} = 12$$

$$T_{M4}^{(1)} = 7$$

Welche Maschine wird nun von welchem Arbeiter als nächste bedient? (4.3) liefert $T_{M2}^{(1)} = 6$ und (4.5) $T_{A1}^{(2)} = 4$ mit $T_{M2}^{(1)} > T_{A1}^{(2)}$, was eine positive Wartezeit von 2 Zeiteinheiten für Arbeiter 1 bedeutet. Er beginnt also mit Bedienung der Maschine B_2 im Zeitpunkt 6. Als neue Endzeitpunkte ergeben sich:

$T_{M2}^{(2)} = 6 + 0 + 6 = 12$; $T_{A1}^{(3)} = 4 + 2 + 2 = 8$.

Uns scheint, daß damit der Planungsablauf ausreichend erklärt wurde. Das weitere Vorgehen kann leicht aus Tabelle 11 und Abbildung 38, wo der Planungsablauf graphisch dargestellt wurde, rekonstruiert werden.

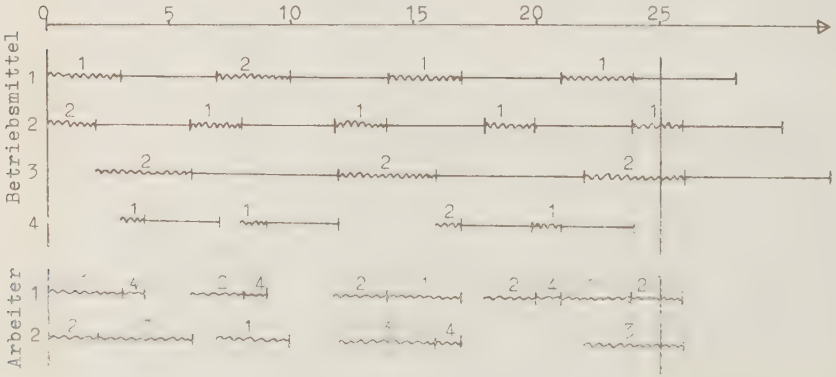


Abb.38: Tabelle 11 im Arbeitsablaufdiagramm

Hier seien nur noch die Korrekturen zu Ende des Planungsvorgangs erläutert. Wie Tabelle 11 erkennen läßt, enden die letzten Arbeitstakte in den Zeitpunkten

$$T_{M1}^{(4)} = 28 \qquad T_{A1}^{(10)} = 26$$

$$T_{M2}^{(5)} = 30 \qquad T_{A2}^{(6)} = 26$$

$$T_{M3}^{(3)} = 32$$

$$T_{M4}^{(4)} = 24$$

Demzufolge hat bei allen Zeiten eine Korrektur zu erfolgen. Bei Maschine A_1, B_2 und C_3 werden die Summen der Nutzungszeiten um 3, 5 bzw. 7 Zeiteinheiten verringert. Da alle Arbeiter über das Ende der Planungsperiode hinaus tätig sind, wird Maschine D_4 noch mit einer Zeiteinheit Brachzeit belastet. Die Tätigkeitszeiten der Arbeitskräfte werden jeweils um eine Zeiteinheit vermindert.
Nach Durchführung dieser Korrekturen ergeben sich die in Tabelle 11 ausgewiesenen Summen der Brach- und Nutzungszeiten bzw. Warte- und Tätigkeitszeiten (In der Tab. 11 mit "End." bezeichnet.) Die ausgewiesenen Zeitkenngrade beziehen sich auf eine Planperiode von 25 (ZE) (In der Tab. 11 mit "Proz." bezeichnet.)

3. Schon dieses kleine Zahlenbeispiel läßt deutlich die Grenzen der von uns vorgeschlagenen Planungsmethode erkennen. Für größere Arbeitsplätze und längere Planperioden ist das Verfahren, sofern man es mit Hand oder nur mit einem Tischrechner durchführt, äußerst zeitaufwendig und schwerfällig, wenn man bedenkt, daß die Arbeitskräfteanzahl parametrisch abgewandelt werden soll, um den Einfluß dieser Abwandlung auf die einzelnen Zeitkategorien zu ermitteln.

Aus diesem Grund erscheint es zweckmäßig, die erforderlichen Rechnungen des Planungsablaufs mit einer elektronischen Datenverarbeitungsanlage durchzuführen. Da dem Planungsablauf eindeutige Gesetzmäßigkeiten zugrunde liegen, ist die Programmierbarkeit gewährleistet.

Vorliegendes Modell wurde von Herrn Dipl.-Kfm. L. Nastansky, Saarbrücken für eine Elektrologica X 1 Datenverarbeitungsanlage als ALGOL-Programm geschrieben und vom Verfasser getestet. Im Anhang dieser Arbeit wurde die Lösung des obigen Zahlenbeispiels wiedergegeben. Das Druckbild würde im wesentlichen wie die Tabelle 11 programmiert. Jede Seite

der Ausgabe enthält folgende Angaben:

(1) Problemnummer
(2) Datum
(3) Betriebsmittelanzahl
(4) Arbeiteranzahl
(5) Länge der Planperiode
(6) Seitenzahl

Auf Seite 1 erfolgt ein Kontrolldruck der eingelesenen Daten. Sodann folgen für jedes B e t r i e b s m i t t e l die Angaben:

(1) Arbeitstaktnummer
(2) Nummer des Arbeiters, der die Maschine im betreffenden Arbeitstakt bedient mit gleichzeitiger Angabe der Zeiteinheiten, die der betreffende Arbeiter bereits untätig ist. Beide Angaben sind durch Nullen getrennt. 2 000 004 bedeutet z. B.: Der Arbeiter 2 bedient die Maschine, er ist bereits seit 4 Zeiteinheiten untätig.
(3) Brachzeit im jeweiligen Arbeitstakt
(4) Nutzungszeit im jeweiligen Arbeitstakt. Die Nutzungszeit wurde in zwei Komponenten aufgespalten.
    (a) Anteil der Zeit, die der Arbeiter an der Maschine tätig ist. (Tätigkeitszeit)
    (b) Anteil der Zeit, die die Maschine ohne menschliches Zutun produziert (Differenz)
(5) Endzeitpunkte der einzelnen Arbeitstakte (Kumulierte Zeit)
(6) Korrekturen am Ende des Planungsablaufs
(7) Zeitkenngrade

Das Programm endet, wenn alle Maschinen und alle Arbeiter abgearbeitet sind.

434 Auswertung des Modells

1. Die Auswertung des Modells erfolgt zweckmäßigerweise durch Vergleich verschiedener Varianten.

Als erstes sei untersucht, wie sich eine unterschiedliche Indizierung der Arbeitsstellen auf Brach- und Wartezeiten auswirkt, da die Aggregate aufgrund ihres Indexes zur Bedienung ausgewählt werden (Vgl. Formel (4.4)). Bei M Arbeitsstellen gibt es M! Möglichkeiten unterschiedlicher Indizierung. Schon bei kleineren Werten von M wird es deshalb unmöglich sein, alle Möglichkeiten durchzurechnen[1]. Aus diesem Grund wird schon

1) CHURCHMAN-ACKOFF-ARNOFF (32), S. 314 f. geben ein anschauliches Beispiel dafür, wie aufgrund dieses schnellen Anwachsens der Möglichkeiten die Rechenzeiten in nicht praktikabler Weise ansteigen.

jetzt erkenntlich, daß ein Kriterium gefunden werden muß, welches Angaben darüber macht, wie die Indizierung vorzunehmen ist.

Für das Zahlenbeispiel im Kapitel 433 wurden sämtliche Möglichkeiten der Indizierung vorgenommen und die Brach- und Wartezeitgrade in Tabelle 12 dargestellt[1].

Die Tabelle läßt erkennen, daß der Einfluß der Indizierung erheblich ist. Nur wenige Ergebnisse der Permutationen sind völlig identisch. (Z.B. 2 und 8, 3 und 13, 4 und 14, 9 und 15, 11 und 21) Manche unterscheiden sich nur in den Wartezeiten der Arbeiter. (z. B. 1 und 7, 2 und 8) Der größere Teil der Permutationen jedoch hat sich nicht wiederholende Brach- und Wartezeitgrade. (z. B. 5, 6, 10, 12, 16 - 20, 22 - 24) Interessant erscheint, daß der Wartezeitgrad der Arbeiter nur sehr gering streut. Der gesamte durchschnittliche Wartezeitgrad aller Permutationen beträgt 28,1 (%). Der durchschnittliche Wartezeitgrad 28 (%) kommt allein 15mal vor[2]. Tests mit anderen Zahlenbeispielen haben ebenfalls gezeigt, daß die durchschnittliche Auslastung der Arbeiter nur wenig streut. Betrachtet man hingegen die Auslastung der Aggregate, so ist nur die gemäß Auswahlordnung zu erwartende Tendenz erkennbar, daß die Aggregate mit zunehmender Indexnummer immer schlechter ausgelastet werden. Daraus ist folgender Schluß zu ziehen: Aggregate, für die eine hohe Auslastung gewünscht wurd, sind an den Anfang der Benummerung zu setzen!

Für die betriebliche Realität macht dies die Suche nach einem Kriterium erforderlich, das angibt, für welche Aggregate eine hohe Auslastung besonders wünschenswert ist.

Als zweites wurde untersucht, wie sich eine Variation der Arbeitskräfteanzahl auf die Brach- und Wartezeiten auswirkt. Hier wurden für das obige Zahlenbeispiel und für die Permutations-Nr. 1 die in folgender Tabelle 13 ausgewiesenen Zeitkenngrade ermittelt:

---

1) Die Nutzungszeitgrade ergeben sich: 100 ./. Brachzeitgrad. Die Tätigkeitszeitgrade ergeben sich: 100 ./. Wartezeitgrad.
2) 26 (%) 5mal, 30 (%) 2mal, 32 (%) 2mal

4 Maschinen: A, B, C, D; 2 Arbeiter: 1, 2												
Nr. der Permutation	Permutation Index				Brachzeitgrad [%] Masch.				Wartezeitgrad [%] Arb.			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	∅	
1	A	B	C	D	0	0	8	36	24	32	28	
2	A	B	D	C	0	0	20	12	12	44	28	
3	A	C	B	D	0	0	24	32	16	40	28	
4	A	C	D	B	0	0	16	24	8	44	26	
5	A	D	B	C	0	4	4	20	20	44	32	
6	A	D	C	B	0	4	8	24	20	36	28	
7	B	A	C	D	0	0	8	36	16	40	28	
8	B	A	D	C	0	0	20	12	12	44	28	
9	B	C	A	D	0	0	8	36	8	48	28	
10	B	C	D	A	8	4	8	16	28	32	30	
11	B	D	A	C	4	4	4	12	20	36	28	
12	B	D	C	A	0	12	4	16	16	40	28	
13	C	A	B	D	0	0	24	32	16	40	28	
14	C	A	D	B	0	0	16	24	8	44	26	
15	C	B	A	D	0	0	8	36	8	48	28	
16	C	B	D	A	0	12	12	16	32	28	30	
17	C	D	A	B	0	4	4	24	20	32	26	
18	C	D	B	A	0	8	8	12	24	32	28	
19	D	A	B	C	4	0	4	20	28	36	32	
20	D	A	C	B	4	0	8	24	20	36	28	
21	D	B	A	C	4	4	4	12	20	36	28	
22	D	B	C	A	8	4	4	8	12	40	26	
23	D	C	A	B	4	0	4	24	20	32	26	
24	D	C	B	A	8	0	8	12	20	36	28	

Tab. 12: Einfluß der Indizierung auf Brach- und Wartezeiten

Arbeiter-anzahl	Brachzeitgrad (%) für Aggregat				Wartezeitgrad (%) für Arbeiter			
	A_1	B_2	C_3	D_4	1	2	3	4
1	20	40	20	80	0	-	-	-
2	0	0	8	36	24	32	-	-
3	0	0	0	8	24	40	80	-
4	0	0	0	0	16	48	80	96

Tab. 13: Einfluß der Änderung der Arbeiteranzahl auf Brach- und Wartezeiten

Aus der Tabelle ist zweierlei ersichtlich: Einmal ist die gegenläufige Tendenz des Verlaufs der Brach- und Wartezeiten bei einer Variation des Personaleinsatzes gut erkennbar. Zum anderen zeigt sich hier für die Arbeiter der gleiche Sachverhalt, der oben schon für die Betriebsmittel festgestellt wurde: Mit zunehmender Indexnummer werden die Arbeiter immer schlechter ausgelastet. Dies jedoch ist aufgrund der Auswahlordnung zu erwarten.

2. Eine Auswertung des Modells enthält unseres Erachtens auch Angaben über E r w e i t e r u n g s m ö g l i c h k e i t e n des Modells.

Unsere Betrachtungen im Kapitel 14113 haben die bei der Ermittlung von Wegzeiten auftretenden Probleme gezeigt. Das vorleigende Modell gestattet ohne allzugroße Schwierigkeiten eine exakte Planung von Wegzeiten. Hierzu wird eine quadratische Matrix der Wegzeiten von Arbeitsstelle s nach Stelle s' (s, s' = 1, 2, ..., M) im Computer gespeichert. Da das Modell ohnehin errechnet, welche Maschine der Arbeiter als nächste bedient, kann die Wegzeit der Matrix entnommen werden und in den Arbeitstakt an geeigneter Stelle eingefügt werden:

Arbeitstakt für den Arbeiter = Wartezeit + Wegzeit + restliche Tätigkeitszeit

Arbeitstakt für das Betriebsmittel = Brachzeit + Wegzeit + Nutzungszeit } gesamte Brachzeit

Am Ende des Planungsablaufs kann die Summe aller Wegzeiten ermittelt werden.

Ferner ist es möglich, in das Planungsmodell Restriktionen verschiedenster Art zu integrieren. Einmal könnte man das Modell dahingehend erweitern, für jede Maschine und jeden Arbeiter gesonderte Planungsperioden anzugeben. Die praktischen Gründe hierfür sind zahlreich. So können die einzelnen Aggregate beispielsweise unterschiedliche Rüstzeiten haben, die von der Schichtzeit subtrahiert einen unterschiedlichen Rest für die Ausnutzungsmöglichkeit der Maschinenkapazität ergeben. Auch für die Arbeiter sind unterschiedliche Planperioden denkbar (Pausen durch Schulung und Anlernen, Springer etc.).
Zum zweiten ließen sich Absatzrestriktionen in der Weise einbauen, daß nach Erreichen eines vorgegebenen Nutzungszeitgrades die Maschinen nicht mehr bedient werden. Wie wir noch sehen werden, ist die Berücksichtigung von Mengenrestriktionen in Kostenminimierungsansätzen unbedingt erforderlich.

44 Die Bestimmung kostenoptimaler Bedienungssysteme

441 Entlohnung der Arbeitskräfte im Zeitlohn

Wie bereits im Kapitel 221 erwähnt, erfolgt die Kostenminimierung für gegebene Auftragsmengen, die als Mengenrestriktionen in das Planungsmodell eingehen.

Die proportionalen Stückkosten eines Produktes, das auf einem Aggregat s gefertigt wird, betragen unter Verwendung der im 2. Kapitel definierten Kurzzeichen

$$k_s = \underbrace{t_{hs} \cdot d_{hs}}_{\text{Bewertete Hauptzeit pro Stück}} + \underbrace{t_{ns} \cdot d_{ns}}_{\text{Bewertete Nebenzeit pro Stück}} + \underbrace{t_{ts} \cdot l}_{\text{Bewertete Tätigkeitszeit pro Stück}} + \underbrace{k}_{\text{Sonstige proportionale Stückkosten}} \tag{4.20}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{Bewertete Nutzungszeit pro Stück}}$$

Liegen die Mengen einer Produktart, die auf dem Aggregat s gefertigt werden sollen, $\bar{x}_s$ fest, so sind die Kosten

$$K_s = \bar{x}_s \cdot k_s \qquad s = 1, \ldots, M \tag{4.21}$$

eine fest Größe und brauchen im Planungsmodell, da irrelevant, n i c h t berücksichtigt zu werden.

Folglich verbleiben die nach Produktarten nicht verursachungsgemäß zurechenbaren Kosten, die bewerteten Brach- und Wartezeiten, die es zu minimieren gibt. Die Zielfunktion des Modells lautet somit:

$$(4.22) \qquad K(A) = \sum_{s=1}^{M} T_{Bas}(A) \cdot d_{ns} + \sum_{r=1}^{A} T_{wr}(A) \cdot l \longrightarrow \text{Min!}$$

Kurzzeichen:

$T_{Bas}(A)$	Brachzeit während der Planperiode an der Maschine s, wenn der Arbeitsplatz von A Arbeitern bedient wird.
d_{ns}	Kostensatz (DM/ZE) der Brachzeit des Aggregates s
$T_{wr}(A)$	Wartezeit während der Planperiode des Arbeiters r, wenn am Arbeitsplatz A Arbeiter tätig sind.
l	Kostensatz (DM/ZE) der Wartezeit eines Arbeiters.

Da im Modell die Arbeiteranzahl parametrisch abgewandelt wird, und zwar von A = 1 bis zum Höchstwert A = M, wird aus der Menge aller $\{ K(A) \}$ das Minimum bestimmt. Die zugehörige Arbeiteranzahl ist die optimale.

Als M e n g e n r e s t r i k t i o n gehen in das Modell die Auftragsmengen ein. Sind die Nutzungszeiten auf das Stück bzw. auf ein ganzzahliges Vielfaches einer Produkteinheit bezogen, so gibt die Arbeitstaktnummer die gefertigte Stückzahl bzw. den Quotienten an, der sich aus der Division der Stückzahl durch die Vorgabezeiteinheit ergibt.

Beispiel: Die Nutzungszeit t_N wurde für 10 Produkteinheiten ermittelt und vorgegeben. Sollen 1200 Stück gefertigt werden, so ist dies also nach dem 120. Arbeitstakt geschehen.

Das im Kapitel 433 beschriebene Modell muß somit für Kostenminimierungsprobleme dahingehend abgewandelt werden, daß die Bedienung einer Maschine nach Erreichen einer vorgegebenen Arbeitstaktnummer (für die Maschine) abgebrochen wird. Der Einbau einer solchen Restriktion bereitet keine besonderen Schwierigkeiten und soll hier nicht weiter beschrieben werden. Bei unterschiedlicher Maschinenbelegung sind jedoch oft hohe Brachzeiten nicht zu vermeiden. Eine geeignete Maschinenbelegungsplanung sollte in diesen Fällen ergänzend hinzutreten.

Von gravierender Wichtigkeit ist weiter die Frage, nach welchem Kriterium die einzelnen Aggregate indiziert werden sollen, um die auch hier M! möglichen Permutationen und deren Berechnung zu umgehen. Hier er-

scheint uns folgendes Vorgehen betriebswirtschaftlich sinnvoll zu sein: Eine Komponente der zu minimierenden Zielfunktion bilden die bewerteten Brachzeiten. Da - wie wir bei der Auswertung des Modells gesehen haben - in der Regel die Aggregate mit dem niedrigsten Index die niedrigsten Brachzeiten aufweisen, wirkt eine Anordnung der Aggregate nach der Höhe der Brachzeitkostensätze im Sinne der Zielsetzung. Das Aggregat mit dem höchsten Brachzeitkostensatz erhält die Nummer Eins, dasjenige mit dem zweithöchsten Kostensatz die Nummer Zwei usw. Ob diese Methode der Indizierung zu einem absoluten Kostenminimum führt, kann im konkreten Fall nur ein Durchrechnen aller M! Permutationen zeigen.

442 Entlohnung der Arbeitskräfte im Akkord

Werden Arbeitskräfte im Akkord entlohnt, so geht der Leistungsgrad der Arbeiter als weiterer Parameter in das Planungsmodell ein. In diesem Modell sei davon ausgegangen, daß alle Arbeiter den gleichen Leistungsgrad realisieren. Der Einzelleistungsgrad eines Arbeiters entspricht also dem durchschnittlichen Leistungsgrad der Gruppe.

Der Leistungsgrad schlägt sich in veränderten Tätigkeitszeiten nieder. Diese Abhängigkeit der Tätigkeitszeiten vom Leistungsgrad läßt sich formelmäßig darstellen. Hierzu wird die Vorgabezeit für die Tätigkeit des Arbeiters bei Vorliegen eines Normalleistungsgrades, der bei 100 % liegen soll, in einen beeinflußbaren und einen unbeeinflußbaren Teil aufgespalten. Man erhält für die vom Leistungsgrad abhängige Vorgabezeit:

$$t_t(\lambda) = t_{tu} + \frac{t_{tb}^{(p)}}{\lambda} \qquad \lambda \geq 100\ \% \tag{4.23}$$

Kurzzeichen:

$t_t(\lambda)$	Tätigkeitszeit beim Leistungsgrad λ
t_{tu}	Unbeeinflußbare Tätigkeitszeit
$t_{tb}^{(p)}$	Beeinflußbare Tätigkeitszeit bei Normalleistungsgrad $\lambda = 100\ \%$
λ	Leistungsgrad

Auch die Nutzungszeiten sind meist vom Leistungsgrad der Arbeitskräfte abhängig, da die Nebenzeit meist reine Handzeit des Arbeiters ist.

Diese Nebenzeit muß gegebenenfalls in einen beeinflußbaren und einen unbeeinflußbaren Teil gespalten werden. In Anhängigkeit vom Leistungsgrad erhält man dann für die Nutzungszeit:

$$(4.24) \qquad t_N(\lambda) = t_{nu} + \frac{t_{nb}^{(p)}}{\lambda} + t_h \qquad \lambda \geq 100\ \%$$

Kurzzeichen:

$t_N(\lambda)$	Nutzungszeit beim Leistungsgrad λ
t_{nu}	Unbeeinflußbare Nebenzeit
$t_{nb}^{(p)}$	Beeinflußbare Nebenzeit bei Normalleistungsgrad $\lambda = 100\ \%$
λ	Leistungsgrad
t_h	Hauptzeit

$t_t(\lambda)$ und $t_N(\lambda)$ gehen als Parameter in das Modell zur Bestimmung von Brach- und Wartezeiten ein.

Wie im Kapitel 2221 erläutert und begründet wurde, sollen bei Akkordentlohnung die (arbeitsablaufbedingten) Wartezeiten mit dem Akkordrichtsatz 1^* entlohnt werden. Als zu minimierende Zielfunktion bei Kostenminimierung erhält man somit:

$$(4.25) \qquad K(A, \ ) = \sum_{s=1}^{M} T_{Bas}(A, \lambda) d_{ns} + \sum_{r=1}^{A} T_{wr}(A, \lambda) \cdot 1^* \longrightarrow \text{Min!}$$

Der Zielfunktionswert $K(A, \lambda)$ ist sowohl von der eingesetzten Arbeitskräfteanzahl als auch vom Leistungsgrad der Gruppe abhängig. Arbeiteranzahl, als auch zu erwartender Leistungsgrad, können im Modell parametrisch abgewandelt werden. Die zum Minimum aller $\{ K(A, \lambda) \}$ für ein gegebenes λ und parametrisch abgewandeltes A gehörende Arbeiteranzahl ist die optimale.

Die in das Modell eingehende Mengenrestriktion ist die gleiche wie im Modell des im Zeitlohn entlohnten Arbeiters, so daß hier nicht weiter darauf eingegangen zu werden braucht.

Die Indizierung der Betriebsmittel erfolgt in diesem Modell ebenfalls nach der Höhe der Brachzeitkostensätze.

45 Die Bestimmung gewinnmaximaler Bedienungssysteme und ihre Probleme

451 Probleme bei der Bestimmung gewinnmaximaler Bedienungssysteme

Soll ein gewinnmaximales Bedienungssystem ermittelt werden, so gehen neben den bisher genannten Größen die Marktpreise der betrieblichen Erzeugnisse in den Kalkül ein. Neben den Verkaufspreisen der betrieblichen Produkte hängt der (Brutto-) Gewinn einer Planungsperiode jedoch auch von den Absatzmengen ab.
Es sei von dem Fall ausgegangen, daß für das zu erstellende Produkt ein konstanter Marktpreis existiert, zu dem beliebige Mengen abgesetzt werden können.

Die Bestimmung gewinnmaximaler Fertigungsprogramme in einstufigen Betrieben mit mehreren erwarteten Kapazitätsengpässen läßt sich nur simultan mit Hilfe der mathematischen Programmierung durchführen. Im allgemeinen wird von einer Zielfunktion ausgegangen, die der Gewinngleichung des Umsatzkostenverfahrens auf Grenzkostenbasis entspricht, jedoch ohne Berücksichtigung der fixen Kosten, da diese auf die Zusammensetzung des Fertigungsprogramms bei unveränderten Kapazitäten keinen Einfluß haben.

$$G = \sum_{i=1}^{n} (p_i - k_i)\, x_i \longrightarrow \text{Max} \tag{4.26}$$

Kurzzeichen:

G	Bruttogewinn
p_i	Marktpreis der Produktart i
k_i	Prop. Selbstkosten der Produktart i
x_i	Herstellmenge der Produktart i (Aktionsvariable)
i	Index: Produktart i = 1, ..., n

Da die zu bestimmenden Produktmengen auf den vorhandenen Fertigungskapazitäten erstellt werden müssen, ist die Zielfunktion (4.26) unter den folgenden Nebenbedingungen zu maximieren:

$$T_j \geqslant \sum_{i=1}^{n} t_{ij} x_i \qquad j = 1, \ldots, m \tag{4.27}$$

Kurzzeichen:

T_j	Kapazität der Fertigungsstelle j
t_{ij}	Beanspruchungskoeffizient der Fertigungsstelle j durch die Produktart i

j	Index: Fertigungsstelle	j = 1, ..., m

Bei Mehrstellenarbeit sind die Personalkapazitäten an die Betriebsmittelkapazitäten optimal anzupassen. Die Restriktionen (4.27) sind somit in zwei Gruppen - Betriebsmittelkapazitäts- und Personalkapazitätsrestriktionen - aufzugliedern; man erhält:

$$(4.27.1) \qquad T_{Mj} \geqslant \sum_{i=1}^{n} t_{Nij} x_i \qquad j = 1, \ldots, M$$

$$(4.27.2) \qquad A \cdot T_A \geqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{M} t_{tij} x_i$$

Kurzzeichen:

T_{Mj}	Kapazität der Maschine j
t_{Nij}	Nutzungszeit der Produktart i auf der Maschine j
A	Arbeiteranzahl
T_A	Kapazität eines Arbeiters
t_{tij}	Tätigkeitszeit des Arbeiters für die Produktart i an der Maschine j

Die Restriktionen (4.27.1) besagen, daß die Kapazität eines jeden einzelnen Betriebsmittels die Höchstgrenze der gesamten Nutzungszeit ist. M ist die Anzahl der zu bedienenden Maschinen. Der Maschinenpark wird von A Arbeitern bedient, deren Kapazität (4.27.2) die Höchstgrenze der gesamten Tätigkeitszeit darstellt. Die Restriktionen liegen in Form von Ungleichungen vor. Durch Einführung von sogenannten Schlupfvariablen können sie in Gleichungen überführt werden. Diese Schlupfvariablen stellen - sofern sie positive Werte annehmen - offensichtlich unausgenutzte Kapazitäten dar, also Brachzeiten bei den Maschinenkapazitäten. Nimmt man die bewerteten Schlupfvariablen noch in die Zielfunktion (4.26) auf, so erhält man als Programmansatz:

Maximiere

$$(4.28) \qquad G = \sum_{i=1}^{n} (p_i - k_i) x_i - \sum_{j=1}^{M} T_{Baj} \cdot d_{nj} - T_w \cdot l$$

unter den Nebenbedingungen:

$$(4.29) \qquad T_{Mj} = \sum_{i=1}^{n} t_{Nij} x_i + T_{Baj} \qquad j = 1, \ldots, M$$

$$(4.30) \qquad A \cdot T_A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{M} t_{tij} x_i + T_w$$

Kurzzeichen:

d_{nj}	Prop. Kostensatz für eine Zeiteinheit Brachzeit auf der Maschine j
T_{Baj}	Brachzeit der Maschine j
1	Prop. Kostensatz für eine Zeiteinheit Wartezeit
T_w	Gesamte Wartezeit aller Arbeiter

In diesem Ansatz ist die Größe A parametrisch abzuwandeln (A = 1, 2, 3, ...). Zu jedem A erhält man einen bestimmten Wert G. Das zum Maximum aus der Menge aller G gehörende A wäre die gewinnmaximale Arbeiteranzahl.

Allerdings begeht man bei einer derartigen Bestimmung optimaler Bedienungssysteme einen schwerwiegenden Fehler. Die bei Mehrstellenarbeit auftretenden Brach- und Wartezeiten entstehen aufgrund von Überlappungen und nicht deshalb, weil eine oder mehrere Restriktionen zum Engpaß werden. Die Brach- und Wartezeiten aufgrund von Überlappungen werden im obigen Modell nicht erfaßt. Und auf diese kommt es ja gerade an! Die zeitlichen Interdependenzen, die bei Mehrstellenarbeit zu berücksichtigen sind, werden in dem oben beschriebenen linearen Programmansatz nicht berücksichtigt. Ein optimaler Ausgleich zwischen Brach- und Wartezeiten, die bei Mehrstellenarbeit auftreten, unterbleibt.

Die Frage, welche Produkte in einem Fertigungsprogramm unter gleichzeitiger Berücksichtigung des gewinnmaximalen Bedienungssystems enthalten sein sollen, ist mit Hilfe eines linearen Programmansatzes somit nicht zu beantworten. Wir schlagen deshalb vor, dieses Problem in zwei Stufen zu lösen, wobei wir uns bewußt sind, daß der skizzierte Lösungsvorschlag nur zu einer "guten" Lösung führt.

(1) Man bestimmt ein gewinnmaximales Fertigungsprogramm ohne Berücksichtigung des Bedienungssystems aufgrund der Deckungsbeiträge und der vorhandenen Maschinenkapazitäten unter der Annahme, daß Bedienungsarbeiter nicht knapp sind. Es geht also primär um die Frage, welche Produkte überhaupt produziert werden sollen, weniger darum, wieviele Produkte von der betreffenden Produktart erzeugt werden sollen. Überdies muß festgelegt werden, welche Produkte auf welchen Aggregaten gefertigt werden, d.h. Probleme der Ver-

fahrenswahl müssen ebenfalls auf der ersten Planungsstufe gelöst werden.

(2) Im zweiten Schritt wird dann aufgrund des von uns vorgeschlagenen Modells eine optimale Abstimmung von Brach- und Wartezeiten, die aufgrund von Überlappungen entstehen, durchgeführt. Das so ermittelte Bedienungssystem wird als gewinnmaximales Bedienungssystem bezeichnet. Gleichzeitig wird damit die Menge der zu erstellenden Produkte festgelegt.

Der zweite Lösungsschritt wird im folgenden Kapitel dargestellt.

452 Die Bestimmung gewinnmaximaler Bedienungssysteme bei bekannter Maschinenbelegung

4521 Entlohnung der Arbeitskräfte im Zeitlohn

Es sei von dem Fall ausgegangen, daß für das zu erstellende Produkt ein konstanter Marktpreis existiert, zu dem beliebige Mengen abgesetzt werden können.

Bezeichnet man den Marktpreis für ein Erzeugnis mit p, so erhält man als Deckungsbeitrag für ein Produkt, das auf der Anlage s hergestellt wird, unter Berücksichtigung von (4.20)

$$c_s = p - k_s \tag{4.31}$$

Bezieht man c_s auf die Nutzungszeit pro Stück, so erhält man den Gewinnbeitrag, der während einer Zeiteinheit Nutzungszeit von dem betreffenden Aggregat s erwirtschaftet wird.

$$c_{Ns} = \frac{p - k_s}{t_{Ns}} \tag{4.32}$$

Unter Berücksichtigung der bewerteten Brach- und Wartezeiten, die als Kosten den Gewinn mindern, erhält man als zu maximierende Zielfunktion:

$$G(A) = \sum_{s=1}^{M} T_{Ns}(A) \cdot c_{Ns} - \sum_{s=1}^{M} T_{Bas}(A) \cdot d_{ns} - \sum_{r=1}^{A} T_{wr}(A) \cdot 1 \longrightarrow \text{Max!} \tag{4.33}$$

Da der Gewinn von der eingesetzten Arbeiterzahl abhängig ist, wird aus der Menge $\{G(A)\}$ das Maximum bestimmt. Die zugehörige Arbeiteranzahl

ist die optimale[1].

An dieser Stelle soll noch kurz gezeigt werden, daß Opportunitätskostenminimierung zum gleichen Ergebnis wie die Gewinnmaximierung führt. Setzt man in (4.33) für die Nutzungszeit

$$(4.34) \qquad T_{Ns}(A) = S - T_{Bas}(A) \qquad s = 1, \ldots, M,$$

also Planperiode abzüglich Brachzeit, so ergibt sich für (4.33)

$$(4.35) \quad G(A) = \sum_{s=1}^{M} S \cdot c_{Ns} - \sum_{s=1}^{M} T_{Bas}(A) \cdot (c_{Ns} + d_{ns}) - \sum_{r=1}^{A} T_{wr}(A) \cdot 1 \longrightarrow \text{Max!}$$

Da jedoch das erste Glied auf der rechten Seite der Gleichung eine Konstante darstellt, kann es beim Maximieren unberücksichtigt bleiben. Multipliziert man (4.35) nach Eliminierung des ersten Summanden auf der rechten Seite mit ./. 1, so kann man die auf diese Weise erhaltene Funktion minimieren.

$$(4.36) \quad G(A) = \sum_{s=1}^{M} T_{Bas}(A) \left(c_{Ns} + d_{ns}\right) + \sum_{r=1}^{A} T_{wr}(A) \cdot 1 \longrightarrow \text{Min!}$$

(4.36) ist bis auf den Bewertungssatz $(c_{Ns} + d_{ns})$ der Brachzeiten mit (4.22) identisch. Dieser Satz setzt sich aus den Opportunitätskosten c_{Ns} (Gewinnentgang) und den effektiven Kosten d_{ns} der Brachzeit zusammen. Bezüglich der optimalen Arbeiteranzahl liefert (4.36) das gleiche Ergebnis wie (4.33).

Von Wichtigkeit ist die Frage, nach welchem Kriterium die Maschinen oder Arbeitsstellen zu indizieren sind. Hier lassen sich zwei sinnvolle Möglichkeiten aufzeigen:

(1) Geht man von der Tatsache aus, daß in der Regel Maschinen mit steigender Indexnummer fallende Nutzungszeitgrade aufweisen, so erscheint es sinnvoll, die Arbeitsstellen nach der Höhe der auf die Nutzungszeiten pro Mengeneinheit bezogenen Deckungsbeiträge zu ordnen, Also:

$$\underbrace{\left(\frac{p - k_s}{t_{Ns}}\right)_{Max}}_{\text{Index 1}} > \underbrace{\left(\frac{p - k_{s'}}{t_{Ns'}}\right)}_{\text{Index 2}} > \ldots\ldots > \underbrace{\left(\frac{p - k_{s''}}{t_{Ns''}}\right)}_{\text{Index M}} \text{ Min}$$

1) Vgl. auch das Zahlenbeispiel im Anhang II.

(2) In dem von uns formulierten Modell wird die Arbeiteranzahl mit A = 1 beginnend in Schrittweiten von Eins parametrisch abgewandelt, und zwar solange, bis A = M erreicht ist. Geht man von der Hypothese aus, daß die eingesetzten Personalkapazitäten zunächst knapp sind, so ist es ökonomisch sinnvoll, die Deckungsbeiträge der einzelnen Produkte auf die Tätigkeitszeiten pro Mengeneinheit zu beziehen und die Indizierung der Aggregate hiernach vorzunehmen. Also:

$$\left(\frac{p - k_s}{t_{ts}}\right)_{\text{Max}} > \left(\frac{p - k_{s'}}{t_{ts'}}\right) > \ldots\ldots > \left(\frac{p - k_{s''}}{t_{ts''}}\right)_{\text{Min}}$$

Index 1 Index 2 ..... Index M

In den zwei von uns vorgeschlagenen Indizierungsmöglichkeiten kommt das bekannte Instrument der Bruttogewinnanalyse pro Einheit der Engpaßbelastung zur Anwendung. Da jedoch ex ante nicht bekannt ist, welche der beiden Kapazitäten - Betriebsmittel- oder Personalkapazitäten - zum Engpaß wird, halten wir es für zweckmäßig, beide Varianten durchzurechnen.
Testbeispiele haben ergeben, daß eine eindeutige Aussage, welche der beiden Indizierungsmethoden zu besseren Ergebnissen führt, nicht gemacht werden konnte. Es hat sich jedoch gezeigt, daß bei optimalen Arbeiteranzahlen, die größer als Eins sind, die zweite Indizierungsmethode zu besseren Ergebnissen führt.

4522 Entlohnung der Arbeitskräfte im Akkord

Werden die Arbeitskräfte im Akkord entlohnt, so geht der Leistungsgrad der Arbeiter als zusätzliches Datum in die Funktion (4.33) ein. Da die Stückkosten und damit auch die Deckungsbeiträge vom Leistungsgrad unabhängig sind, ist der Einfluß des Leistungsgrades lediglich bei der Ermittlung der Arbeiter- und Betriebsmittelzeiten zu berücksichtigen. Dies erfolgt in der gleichen Weise, wie es im Kapitel 442 für die Kostenminimierung dargestellt wurde. Die Zielfunktion kann somit sofort angegeben werden:

(4.37)

$$G(A,\lambda) = \sum_{s=1}^{M} T_{Ns}(A,\lambda) C_{Ns} - \sum_{s=1}^{M} T_{Bas}(A,\lambda) \cdot d_{ns} - \sum_{r=1}^{A} T_{wr}(A,\lambda) \cdot 1^{*} \longrightarrow \text{Max!}$$

Sind für ein gegebenes λ und alle Arbeiteranzahlen A = 1, ..., M die Werte der Funktion (4.37) ermittelt, so wird aus der Menge $\{G(A,\lambda)\}$ das Maximum bestimmt. Die zugehörige Arbeiteranzahl ist die optimale.

Ein Zahlenbeispiel zum Modell der Gewinnmaximierung wird im Anhang gegeben.

5 MODELLE ZUR BESTIMMUNG OPTIMALER BEDIENUNGSSYSTEME BEI STOCHASTISCHER MEHRSTELLENARBEIT

51 Modellgruppe I: Anforderungsbedienung

511 Modell: Grundform 1 der Mehrstellenarbeit; exponentielle Verteilung der Bedienungszeiten. Das Modell von C. Palm (M/M/s)

5111 Prämissen und Darstellung des Modells

1. Es soll ein System mit folgenden Prämissen betrachtet werden:

Der Input-Prozeß

(1) Der Arbeitsplatz besteht aus M homogenen Arbeitsstellen (Maschinen, Aggregaten). Die Arbeitsstellen sind im Produktionsprozeß nicht verkettet, d.h. der Ausfall einer Maschine bedingt nicht den Ausfall von anderen Aggregaten.

(2) Alle Maschinen sind mit den gleichen Arbeitsgegenständen (Produkte, Erzeugnisse, Werkstücke) belegt.

(3) Die ununterbrochene Laufzeit einer Maschine ist eine nicht negative exponential verteilte Zufallsvariable, d.h. die Verteilungsfunktion der Maschinenlaufzeit lautet:

$$(5.1) \qquad A(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ 1 - e^{-ut} & \text{für } t > 0,\ u > 0 \end{cases}$$

(4) Bei den Maschinenstillstandsursachen handelt es sich nicht um zeitabhängige Verschleißerscheinungen von Maschinenteilen, sondern um spontan auftretende Defekte, wie z.B. Fadenbrüche an Webautomaten.

(5) Die Zufallsvariablen sind voneinander stochastisch unabhängig.

Folgerung:

Die Wahrscheinlichkeit, daß in einem kleinen Zeitintervall der Länge

Δt mehr als eine Maschine ausfällt, ist $o(\Delta t)$[1]. Dies folgt aus der Reihenentwicklung der e-Funktion. Sei θ := Laufzeit einer Maschine. Somit gilt nach (5.1)

$$p(\theta \leqslant \Delta t) = A(\Delta t) = 1 - e^{-u\Delta t}$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{u\Delta t}{1!} + \frac{u^2\ \Delta t^2}{2!} - + \ldots\right)$$

$$= u\ \Delta t + o(\Delta t)$$

Oder: Aus Prämisse (3) bis (5) folgt:
$p(\{$ Zwei Maschinen fallen in $[t, t+\Delta t]$ aus $\}) = p(\{$ Maschine Eins fällt in $[t, t+\Delta t]$ aus $\}) \cdot p(\{$ Maschine Zwei fällt in $[t, t+\Delta t]$ aus $\})$ (Prämisse (5)). Aus vorstehender Folgerung entnimmt man unter Beachtung von Prämisse (3) und (4), daß jeder einzelne Faktor den Wert $u\ \Delta t + o(\Delta t)$ hat; somit folgt: $p(\{$ Zwei Maschinen fallen in $[t, t+\Delta t]$ aus $\}) =$

$$(u\ \Delta t + o(\Delta t))^2 = u^2\ \Delta t^2 + 2u\ \Delta t\ o(\Delta t) + (o(\Delta t))^2$$

$$= o(\Delta t)$$

Der Output-Prozeß

(1) Der Arbeitsplatz wird von A Arbeitern bedient, die in bezug auf Arbeitseignung und Arbeitsintensität gleich qualifiziert sein sollen. Sie zeigen keine Ermüdung im Zeitablauf.

(2) Jeder Arbeiter bedient nur eine Maschine.

(3) Die Bedienungszeit, die eine Arbeitskraft zur Bedienung einer Maschine benötigt, ist ebenfalls eine nicht negative exponential verteilte Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion

$$(5.2) \qquad B(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leqslant 0 \\ 1 - e^{-vt} & \text{für } t > 0,\ v > 0 \end{cases}$$

1) Mit $o(\Delta t)$ bezeichnet man einen Ausdruck, für den für $\Delta t \longrightarrow 0$ gilt:

$$\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

Man sagt: Für $\Delta t \longrightarrow 0$ geht $o(\Delta t)$ mit höherer als erster Ordnung gegen 0. Das bedeutet also, daß zwischen zwei Ausfällen mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit eine Zeitspanne liegt; die Ereignisse sind damit zeitlich unterscheidbar.

Betrachtet man zwei aufeinanderfolgende Zeitintervalle, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Arbeiter im zweiten Zeitintervall die Bedienung der Maschine beendet, wenn er im ersten Zeitintervall bereits an der Maschine gearbeitet hat, größer, als wenn er im ersten Intervall frei war. Diese Einschränkung fällt jedoch dann nicht ins Gewicht, wenn die mittlere Bedienzeit im Vergleich zum betrachteten Zeitintervall klein ist. Im folgenden sei dies unterstellt.

(4) Die Zufallsvariablen sind voneinander stochastisch unabhängig.

(5) Lauf- und Bedienungszeiten sind stochastisch unabhängig.

Folgerung:

Aus den Prämissen (3) bis (5) folgt (in gleicher Weise wie beim Input-Prozeß): Wird eine Maschine zum Zeitpunkt t bedient, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Bedienung vor dem Zeitpunkt $t + \Delta t$ endet: $v\,\Delta t + o(\Delta t)$.

Folgerung für das gesamte Wartesystem:

Der Wert der Wahrscheinlichkeit, daß in einem Zeitintervall der Länge Δt mindestens zwei Übergänge im System stattfinden, ist $o(\Delta t)$.

Stellvertretend für alle möglichen Ereignisse, die einen solchen Übergang zur Folge haben, sei diese Folgerung für folgendes Ereignis bewiesen.

$$\left\{ \text{Maschine n fällt in } [t,t+\Delta t] \text{ aus} \cap \text{Maschine m wird in } [t,\ t+\Delta t] \text{ bedient} \right\} := \left\{ E_2 \right\} \qquad m \neq n$$

Für $p(\{E_2\})$ gilt wegen Prämisse (5) (Output):

$$\begin{aligned} p(\{E_2\}) &= p(\{\text{Maschine n fällt in } [t,\ t+\Delta t] \text{ aus}\}) \\ &\quad \cdot p(\{\text{Maschine m wird in } [t,\ t+\Delta t] \text{ bedient}\}) \\ &= (u\,\Delta t + o(\Delta t))\ (v\,\Delta t + o(\Delta t)) \\ &= o(\Delta t) \end{aligned}$$

Der Anfangszustand

Zu Beginn der Betrachtung, also im Zeitpunkt $t = 0$ sollen alle Maschinen laufen.

2. Das nachfolgend dargestellte Modell, das zu den "klassischen" Modellen der Warteschlangentheorie gehört, wurde erstmals von dem Schweden C. PALM im Jahre 1947 formuliert[1]. 1958 erschien dieser grundlegende Aufsatz in englischer Übersetzung[2] und 1965 auch in deutscher Sprache[3]. Es ist das wohl meist behandelste "machine interference problem" in der englischsprachigen Literatur zur Warteschlangentheorie. Im Laufe der Zeit hat das Modell einige Ergänzungen erfahren, die wir an entsprechender Stelle aufzeigen werden.
Die Darstellung des Modells soll hier nicht in der ursprünglichen Fassung von C. PALM erfolgen; wir schließen uns der Analyse von W. FELLER[4] an, der gezeigt hat, daß das Palmsche Modell der spezielle Fall eines stationären "Geburten- und Sterbeprozesses" ist.

3. Sei N(t) eine Zufallsvariable, die die Anzahl nicht laufender Maschinen angibt und sei

$$P_n(t) = p(\{N(t) = n\}) \qquad n = 0, 1, \ldots, M,$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, daß im Zeitpunkt t n Maschinen nicht einsatzfähig sind.
Man sagt, das Wartesystem befinde sich im Zustand E_n, wenn zur Zeit t n Maschinen nicht arbeiten. Ein Übergang vom Zustand E_n zum Zustand E_{n+1} wird durch den Stillstand einer der (M - n) laufenden Maschinen verursacht, wohingegen ein Übergang vom Zustand E_n zum Zustand E_{n-1} dadurch erfolgt, daß die Bedienung einer stillstehenden Maschine beendet ist und diese dadurch wieder in Gang gesetzt wird.

Unter der Annahme, daß $A \geq 1$ haben wir folgende Fälle zu beachten:

- Ist $n \leq A$, dann befindet sich das Wartesystem im Zustand E_n, d.h. n Maschinen werden bedient und (A - n) Arbeitskräfte sind untätig.
- Ist $n \geq A$, so bedeutet der Zustand E_n, daß A Maschinen bedient werden und (n-A) Maschinen auf Bedienung warten.

Um den Geburten- und Todesprozeß zu beschreiben, betrachtet man zweckmäßigerweise die Ereignisse, die sich in einem Zeitintervall der Länge (t, t + dt) ereignen und eine Zustandsänderung des Systems bewirken.

1) PALM (153), S. 75-80, 90-94, 119-123
2) PALM (154)
3) PALM (155)
4) Vgl. FELLER (49), S. 416 ff.

Ein Geburts- und Todesprozeß der Warteschlange erlaubt unter den getroffenen Annahmen[1] nur Veränderungen zwischen unmittelbar benachbarten Zuständen, also $E_0 \longleftrightarrow E_1$, $E_{n-1} \rightleftarrows E_n \rightleftarrows E_{n+1}$, $E_{M-1} \longleftrightarrow E_M$.
Befindet sich das System zu einem beliebigen Zeitpunkt t im Zustand E_n, so ist die bedingte Wahrscheinlichkeit im Zeitintervall (t, t + dt) in den Zustand E_{n+1} überzugehen in der Zeit konstant und lautet:

$$(1 - v_n dt - o(dt)) \cdot (u_n dt + o(dt)) = u_n dt + o(dt)$$

Befindet sich das System zu einem beliebigen Zeitpunkt t im Zustand E_n, so ist die bedingte Wahrscheinlichkeit im Zeitintervall (t, t+dt) in den Zustand E_{n-1} überzugehen in der Zeit konstant und lautet:

$$(1 - u_n dt - o(dt)) \cdot (v_n dt + o(dt)) = v_n dt + o(dt)$$

Befindet sich das System zu einem beliebigen Zeitpunkt t im Zustand E_n, so ist die bedingte Wahrscheinlichkeit im Zeitintervall (t, t+dt) in dem Zustand E_n zu verbleiben in der Zeit konstant und lautet:

$$(1 - u_n dt - o(dt))\ (1 - v_n dt - o(dt)) = 1 - (u_n + v_n)dt + o(dt)$$

Die globale Ankunftsrate (Geburtenrate) u_n und die globale Abfertigungsrate (Todesrate) v_n sind zu erläutern:

Der unter 5111.1 beschriebene Input-Prozeß erfüllt die Bedingungen des Poisson-Prozesses[2]. Betrachtet man zwei fremde Zeitintervalle, so ist die Wahrscheinlichkeit für einen Maschinenstillstand im zweiten Zeitintervall unabhängig davon, ob die Maschine im ersten Zeitintervall gelaufen ist oder nicht, weil zeitabhängige Stillstandsursachen ausgeschlossen wurden.
Der Parameter des Poisson-Prozesses u ist jedoch nicht konstant, sondern hängt von der Zahl der laufenden Maschinen ab.

Bei n stehenden Maschinen gilt für die Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls im Zeitintervall der Länge dt:[3]

---

1) Übergänge zu nicht unmittelbar benachbarten Zuständen sind zwar möglich, jedoch hat ihre Eintrittswahrscheinlichkeit - wie man aus den Folgerungen der Prämissen entnehmen kann - den Wert o(dt).
2) Vgl. S. 104 dieser Arbeit.
3) Auf einen Beweis sei hier verzichtet. Vgl. BECKER (8), S. 29 f.

$$u_n dt + o(dt) \begin{cases} = Mu\,dt + o(dt) & \text{für } n = 0 \\ = (M-n)u\,dt + o(dt) & \text{für } 1 \leqslant n \leqslant M \end{cases}$$

Der unter 5111.1 beschriebene Output-Prozeß erfüllt die Bedingungen II und III des Poisson-Prozesses[1]. Bedingung I ist dagegen nur näherungsweise erfüllt[2].

In gleicher Weise wie beim Input-Prozeß besteht dann eine Abhängigkeit des Poisson-Parameters v_n von der Anzahl der stehenden Maschinen. Bei n stehenden Maschinen gilt für die Wahrscheinlichkeit einer Bedienung im Zeitintervall der Länge dt:[3]

$$v_n dt + o(dt) \begin{cases} = 0 & \text{für } n = 0 \\ = n \cdot v dt + o(dt) & \text{für } 1 \leqslant n < A \\ = A \cdot v dt + o(dt) & \text{für } A \leqslant n \leqslant M \end{cases}$$

oder unter Beachtung der Definition $v' = A \cdot v$

$$v_n dt + o(dt) \begin{cases} = 0 & \text{für } n = 0 \\ = \frac{n \cdot v'}{A} dt + o(dt) & \text{für } 1 \leqslant n < A \\ = v' dt + o(dt) & \text{für } A \leqslant n \leqslant M \end{cases}$$

Unter den gesetzten Prämissen erhält man für die verschiedenen Übergangswahrscheinlichkeiten:

Zustandsänderung	Übergangswahrscheinlichkeiten[4]
$E_0 \longrightarrow E_0$	$1 - M \cdot u \cdot dt$
$E_0 \longrightarrow E_1$	$M \cdot u \cdot dt$
$E_1 \longrightarrow E_0$	$v \cdot dt = \frac{v'}{A} \cdot dt$
.	
.	
.	
$E_A \longrightarrow E_A$	$1 - (M-A) \cdot u \cdot dt - A \cdot v \cdot dt = 1 - (M-A) \cdot u \cdot dt - v' \cdot dt$
$E_A \longrightarrow E_{A+1}$	$(M-A) \cdot u \cdot dt$
$E_A \longrightarrow E_{A-1}$	$A \cdot v \cdot dt = v' \cdot dt$
.	
.	
.	
$E_{M-1} \longrightarrow E_M$	$u \cdot dt$
$E_M \longrightarrow E_M$	$1 - A \cdot v \cdot dt = 1 - v' \cdot dt$
$E_M \longrightarrow E_{M-1}$	$A \cdot v \cdot dt = v' \cdot dt$

1) Vgl. hierzu S. 104
2) Vgl. Prämisse (3) des Output-Prozesses
3) Auf einen Beweis sei verzichtet. Vgl. BECKER (8), S. 31.
4) Bei den Übergangswahrscheinlichkeiten wurden die Glieder o(dt) vernachlässigt.

Als Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten erhält man:

Zustand zum Zeitpunkt t	Zustand zum Zeitpunkt t + dt									
	n	0	1	. . .	A − 1	A	A + 1	. . .	$\bar{M}-1$	$\bar{M}$
	0	$1-\bar{M}\,u\,dt$	$\bar{M}\,u\,dt$	. . .	0	0	0	. . .	0	0
	1	$\frac{v'}{A}\,dt$	$1-(\bar{M}-1)\,u\,dt-\frac{v'}{A}\,dt$	. . .	0	0	0	. . .	0	0
	.	.	.		.	.	.		.	.
	.	.	.		.	.	.		.	.
	.	.	.		.	.	.		.	.
	A − 1	0	0	. . .	$1-(\bar{M}-A+1)\,u\,dt-\frac{A-1}{A}\,v'\,dt$	$(\bar{M}-A+1)\,u\,dt$	0	. . .	0	0
	A	0	0	. . .	$v'\,dt$	$1-(\bar{M}-A)\,u\,dt-v'\,dt$	$(\bar{M}-A)\,u\,dt$	. . .	0	0
	A + 1	0	0	. . .	0	$v'\,dt$	$1-(\bar{M}-A-1)\,u\,dt-v'\,dt$	. . .	0	0
	.	.	.		.	.	.		.	.
	.	.	.		.	.	.		.	.
	.	.	.		.	.	.		.	.
	$\bar{M}-1$	0	0	. . .	0	0	0	. . .	$1-u\,dt-v'\,dt$	$u\,dt$
	$\bar{M}$	0	0	. . .	0	0	0	. . .	$v'\,dt$	$1-v'\,dt$

Übergangsmatrix

Diese Matrix läßt sich anschaulich in einem sog. Übergangsgraphen darstellen (Abb. 39).

4. Gemäß unseren Ausführungen im Kapitel 333 lassen sich nun die Gleichungen, die das System regieren, angeben: (5.3)

I. $n = 0$ zum Zeitpunkt $t + dt$

$$P_0(t+dt) = (1 - M\,u\,dt)\,P_0(t) + \frac{v'}{A}\,dt\,P_1(t) + o(dt)$$

II. $1 \leq n < A$ zum Zeitpunkt $t + dt$

$$P_n(t+dt) = (M-n+1)u\,dt\,P_{n-1}(t) + (n+1)\frac{v'}{A}dt\,P_{n+1}(t) - \left[1-(M-n)u\,dt-\frac{n}{A}v'dt\right]P_n(t)$$

III. $A \leq n \leq M$ zum Zeitpunkt $t + dt$

$$P_n(t+dt) = (M-n+1)u\,dt\,P_{n-1}(t) + v'dt\,P_{n+1}(t) - \left[(1-(M-n)u\,dt-v'dt\right]P_n(t)$$

IV. $n = M$ zum Zeitpunkt $t + dt$

$$P_M(t+dt) = u\,dt\,P_{M-1}(t) + (1 - v'dt)\,P_M(t) + o(dt)$$

Vollzieht man den Grenzübergang $dt \longrightarrow 0$, so erhält man ein System von Zustandsgleichungen, die "Geburten- und Todesgleichungen": (5.4)

$$\frac{d\,P_0(t)}{dt} = -M\,u\,P_0(t) + \frac{v'}{A}\,P_1(t) \qquad \text{I}$$

$$\frac{d\,P_n(t)}{dt} = (M-n+1)u\,P_{n-1}(t) + (n+1)\frac{v'}{A}P_{n+1}(t) - \left[(M-n)u+\frac{n}{A}\,v'\right]P_n(t) \qquad \text{II}$$

$$\frac{d\,P_n(t)}{dt} = (M-n+1)u\,P_{n-1}(t) + v'P_{n+1}(t) - \left[(M-n)u+v'\right]\,P_n(t) \qquad \text{III}$$

$$\frac{d\,P_M(t)}{dt} = u\,P_{M-1}(t) + v'\,P_M(t) \qquad \text{IV}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (5.4) kann man verhältnismäßig einfach praktische Fälle lösen, wenn u und v gegeben sind.

Unter der Annahme, daß dieses System stationäre, d. h. von t unabhängige Lösungen $P_n := t \xrightarrow{\lim} \infty\ P_n(t)$ hat, können diese einfach berechnet werden.

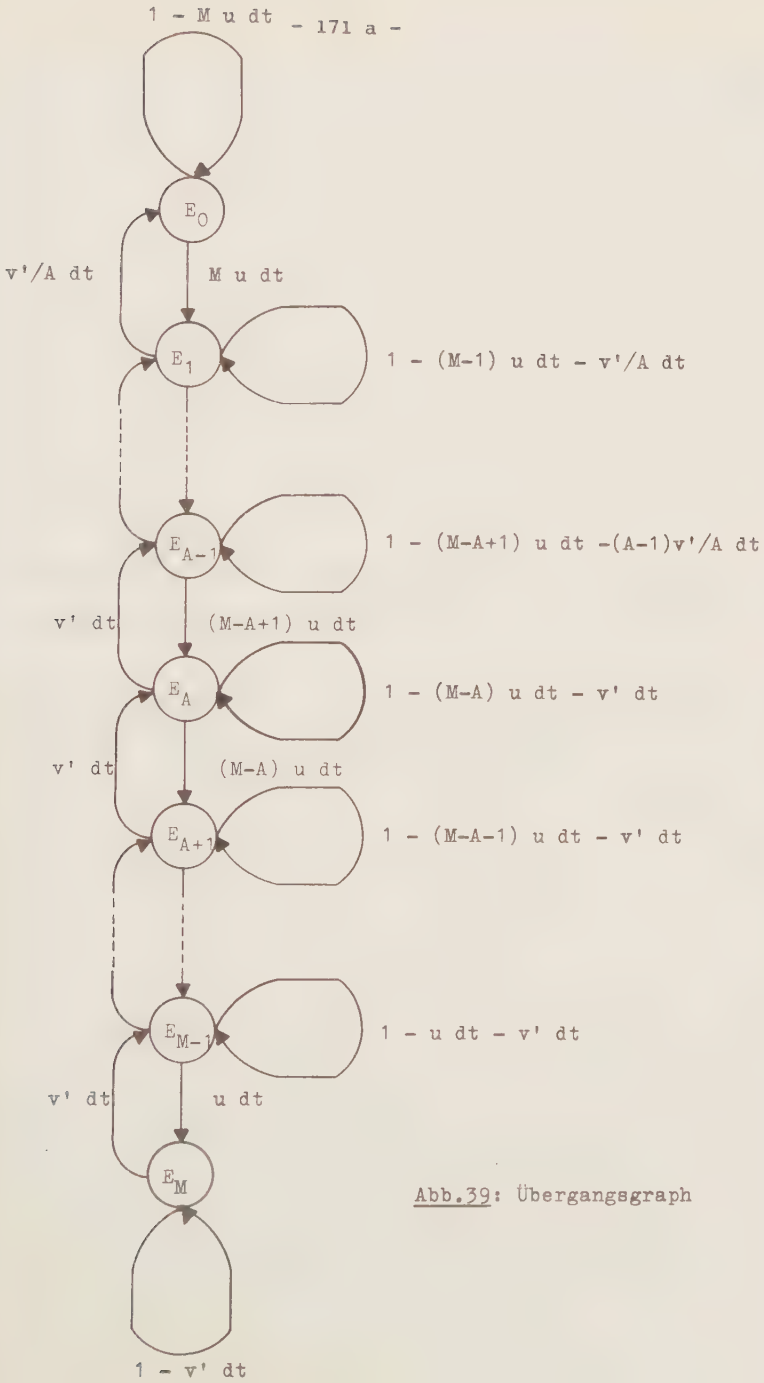


Abb.39: Übergangsgraph

Wegen $\frac{dP_n}{dt} = 0$ gilt: (5.5)

$$0 = -Mu\ P_0 + \frac{v'}{A} P_1 \qquad \text{I}$$

$$0 = (M-n+1)u\ P_{n-1} + (n+1)\frac{v'}{A} P_{n+1} - \left[(M-n)u + \frac{n}{A} v'\right] P_n \qquad \text{II}$$

$$0 = (M-n+1)u\ P_{n-1} + v'\ P_{n+1} - \left[(M-n)u + v'\right] P_n \qquad \text{III}$$

$$0 = u\ P_{M-1} + v'\ P_M \qquad \text{IV}$$

oder (unter Berücksichtigung von $v' = A \cdot v$): (5.6)

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{M \cdot u}{v} \qquad \text{I}$$

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{(M-n)\ u + n \cdot v}{(n+1)\ v} - \frac{(M-n+1)u \cdot P_{n-1}}{(n+1)v \cdot P_n} \qquad \text{II}$$

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{(M-n)\ u + A \cdot v}{A \cdot v} - \frac{(M-n+1)u \cdot P_{n-1}}{A \cdot v \cdot P_n} \qquad \text{III}$$

$$\frac{P_M}{P_{M-1}} = \frac{u}{A \cdot v} \qquad \text{IV}$$

Wir setzen

(5.7) $$\frac{P_{n+1}}{P_n} = w_n$$

und

(5.8) $$\frac{u}{v} = f$$

Dann gilt:

(5.9)

$$w_0 = M \cdot f \qquad \text{I}$$

$$w_n = \frac{(M-n)\ f + n}{n+1} - \frac{(M-n+1)\ f}{(n+1)w_{n-1}} \qquad \text{II}$$

$$w_n = \frac{(M-n)\ f + A}{A} - \frac{(M-n+1)\ f}{A \cdot w_{n-1}} \qquad \text{III}$$

$$w_{M-1} = \frac{f}{A} \qquad \text{IV}$$

Durch sukzessives Einsetzen erhält man:

$$(5.10)\quad w_1 = \frac{(M-1)\,f + 1}{2} - \frac{M\,f}{2M\,f} = \frac{(M-1)\,f}{2}$$

$$(5.11)\quad w_2 = \frac{(M-2)\,f + 2}{3} - \frac{2(M-1)\,f}{3(M-1)\,f} = \frac{(M-2)\,f}{3}$$

Durch Induktion beweist man

$$(5.12)\quad w_n = \frac{(M-n)\,f}{n+1} \qquad \text{für } 0 \leqslant n < A$$

und

$$(5.13)\quad w_n = \frac{(M-n)\,f}{A} \qquad \text{für } A \leqslant n \leqslant M$$

Für die w_n gilt:

$$(5.14)\quad w_0 \cdot w_1 \cdot w_2 \cdots w_{n-1} = \frac{P_1}{P_0}\,\frac{P_2}{P_1} \cdots \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{P_n}{P_0}$$

und für $0 \leqslant n < A$ folgt

$$(5.15)\quad \frac{P_n}{P_0} = \frac{M(M-1)\ldots(M-n+1)f^n}{n!} = \binom{M}{n} \cdot f^n$$

und für $A \leqslant n \leqslant M$ folgt

$$(5.16)\quad \frac{P_n}{P_0} = \frac{M(M-1)\ldots(M-n+1)f^n}{A!\,A^{n-A}} = \binom{M}{n}\frac{n!\,f^n}{A!\,A^{n-A}}$$

Beachtet man, daß

$$(5.17)\quad \sum_{n=0}^{M} P_n = 1$$

so folgt

$$(5.18)\quad \sum_{n=1}^{M} P_n = 1 - P_0$$

bzw.

$$(5.19)\quad \sum_{n=1}^{M} \frac{P_n}{P_0} = \frac{1 - P_0}{P_0}$$

Zusammen mit (5.15) und (5.16) ergibt sich:

$$(5.20)\quad \sum_{n=1}^{M} \frac{P_n}{P_0} = \sum_{j=1}^{A-1} \binom{M}{j} f^j + \sum_{j=A}^{M} \binom{M}{j} \frac{j!\,f^j}{A!A^{j-A}} = S$$

$$(5.21)\qquad S = \frac{1 - P_0}{P_0} \iff P_0 = \frac{1}{S + 1}$$

Beachtet man, daß $\binom{M}{0} f^0 = 1$, so folgt:

$$(5.22)\qquad P_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{A-1} \binom{M}{j} f^j + \sum_{j=A}^{M} \binom{M}{j} \frac{j!\, f^j}{A!\, A^{j-A}}}$$

$$(5.23)\qquad P_n = \binom{M}{n} f^n \cdot P_0 \qquad 0 \leqslant n < A$$

$$(5.24)\qquad P_n = \binom{M}{n} \frac{n!\, f^n}{A!\, A^{n-A}} \cdot P_0 \qquad A \leqslant n \leqslant M$$

5. Für den stationären Fall lassen sich nun alle das System charakterisierenden Größen bestimmen.

Kurzzeichen:

$\bar{M}_h$	Mittlere Anzahl laufender Maschinen
$\bar{M}_n$	Mittlere Anzahl in Bedienung befindlicher Maschinen
$\bar{M}_{Ba}$	Mittlere Anzahl wartender Maschinen
T	Planperiode einer Maschine
$\bar{T}_h$	Mittlere Laufzeit aller Maschinen
$\bar{T}_n$	Mittlere Bedienzeit aller Maschinen
$\bar{T}_{Ba}$	Mittlere Brachzeit aller Maschinen
$\bar{T}_N$	Mittlere Nutzungszeit aller Maschinen

Es gilt

$$(5.25)\qquad M = \bar{M}_h + \bar{M}_n + \bar{M}_{Ba}$$

und

$$(5.26)\qquad M \cdot T = \bar{T}_h + \bar{T}_n + \bar{T}_{Ba} = \bar{T}_N + \bar{T}_{Ba}$$

Die mittlere Anzahl laufender (in Bedienung befindlicher, wartender) Maschinen ist proportional zur mittleren Laufzeit (Bedienzeit, Brachzeit) aller Maschinen:

$$(5.27)\qquad M : \bar{M}_h : \bar{M}_n : \bar{M}_{Ba} = M \cdot T : \bar{T}_h : \bar{T}_n : \bar{T}_{Ba}$$

Es wurde bereits festgestellt, daß u der Kehrwert der mittleren Laufzeit der Maschinen[1] und v der Kehrwert der mittleren Bedienzeit einer Maschine ist[2]. Aus diesem Grund gilt:

$$\bar{t}_n : \bar{t}_h = u : v = \varphi = \text{konstant} \quad (5.28)$$[3]

$\bar{t}_n$ Mittlere Bedienzeit einer Maschine
$\bar{t}_h$ Mittlere Laufzeit einer Maschine

Wegen der Homogenität aller Maschinen gilt auch:

$$\bar{T}_n : \bar{T}_h = \bar{M}_n : \bar{M}_h = \varphi \quad (5.29)$$

Für die mittlere Anzahl stillstehender Maschinen $\bar{n}$ gilt nun:

$$\bar{M}_n + \bar{M}_{Ba} = \bar{n} = \sum_{n=0}^{M} n \cdot P_n \quad (5.30)$$

Für die mittlere Anzahl wartender Maschinen, die eigentliche Schlangenlänge, ergibt sich:

$$\bar{M}_{Ba} = \sum_{n=A}^{M} (n - A)\, P_n \quad (5.31)$$

Aus (5.30) und (5.31) ergibt sich die mittlere Anzahl der in Bedienung befindlicher Maschinen:

$$\bar{M}_n = \sum_{n=0}^{A-1} n\, P_n + \sum_{n=A}^{M} A \cdot P_n \quad (5.32)$$

Sei

$\bar{A}_t$ Mittlere Anzahl tätiger Arbeitskräfte
$\bar{A}_w$ Mittlere Anzahl untätiger (wartender) Arbeitskräfte
T Planperiode eines Arbeiters
$\bar{T}_t$ Mittlere Tätigkeitszeit aller Arbeitskräfte
$\bar{T}_w$ Mittlere Wartezeit aller Arbeitskräfte

---

1) Vgl. S.107 dieser Arbeit
2) Vgl. S.116 dieser Arbeit
3) φ wird als "Servicequotient" oder "Verkehrsdichte" bezeichnet. Vgl. FERSCHL (51), S. 104; SCHNEEWEISS (177), S. 478

Es gilt:

(5.33) $$A : \bar{A}_t : \bar{A}_w = A \cdot T : \bar{T}_t : \bar{T}_w$$

Die mittlere Anzahl wartender Arbeiter ist:

(5.34) $$\bar{A}_w = \sum_{n=0}^{A} (A - n)\ P_n$$

Aus (5.34) lassen sich noch einige Beziehungen ableiten: Da die mittlere Anzahl zu bedienender Maschinen gleich der mittleren Anzahl tätiger Arbeiter sein muß, gilt auch:

(5.35) $$\bar{M}_n = A - \sum_{n=0}^{A} (A - n)\ P_n$$

und da

(5.36) $$\bar{M}_{Ba} = M - \bar{M}_h - \bar{M}_n = M - \bar{M}_n \left(1 + \frac{v}{u} \right)$$

gilt auch

(5.37) $$\bar{M}_{Ba} = M - \frac{u + v}{u} \left[A - \sum_{n=0}^{A} (A - n)\ P_n \right]$$

6. Um eine Berechnung der Wahrscheinlichkeiten P_n im praktischen Fall zu vermeiden, kann man die Tafeln von L. G. PECK und R.N. HAZELWOOD benutzen[1]. Diese Tafeln geben den Nutzungszeitgrad und die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß eine ausfallende Maschine warten muß, bevor sie bedient wird, und zwar als Funktion der Parameter: Anzahl Maschinen, Anzahl Arbeitskräfte, Verhältnis Brachzeit zur Nutzungszeit.

Kurzzeichen	Peck - Hazelwood	In dieser Arbeit verwendete Kurzzeichen
Anzahl Maschinen	N	M
Anzahl Arbeiter	M	A
Mittlere Bedienzeit	T	$\bar{T}_n$
Mittlere Laufzeit	U	$\bar{T}_h$
Mittlere Brachzeit	W	$\bar{T}_{Ba}$
Nutzungszeitgrad	F	
"Service factor"	$X = \frac{T}{T + U}$	$\frac{\bar{T}_n}{\bar{T}_n + \bar{T}_h} = \frac{u}{v + u}$

1) PECK-HAZELWOOD (158)

Im einzelnen sind tabelliert:

$$F = \frac{T + U}{T + W + U} = \frac{\bar{T}_n + \bar{T}_h}{\bar{T}_n + \bar{T}_{Ba} + \bar{T}_h} = \frac{\bar{T}_N}{M \cdot T} \tag{5.38}$$

$$D = \int_0^\infty D(t)\, dt \tag{5.39}$$

D ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine ausfallende Maschine warten muß, bevor sie bedient wird. D(t) ist die Verteilungsfunktion der Brachzeit einer Maschine. Für die mittlere Brachzeit erhält man:

$$W = \int_0^\infty t\, D(t)\, dt \tag{5.40}$$

Als Parameter bei PECK und HAZELWOOD dienen: N, M, X.

Unter Benutzung der Kurzzeichen von PECK und HAZELWOOD erhält man für die uns interessierenden Größen:

$$\bar{M}_h = N \cdot F \cdot (1 - X)$$
$$\bar{M}_n = N \cdot F \cdot X$$
$$\bar{M}_{Ba} = N \cdot (1 - F)$$
$$\bar{n} = N\,(1 - (1 - X)\,F)$$
$$\bar{A}_w = M - N \cdot F \cdot X$$
$$\bar{A}_t = N \cdot F \cdot X$$
$$\bar{T}_h = T \cdot NF\,(1 - X)$$
$$\bar{T}_n = T \cdot N \cdot F \cdot X$$
$$\bar{T}_{Ba} = T \cdot N\,(1 - F)$$
$$\bar{T}_w = T\,(M - N \cdot F \cdot X)$$
$$\bar{T}_t = T \cdot N \cdot F \cdot X$$

P. NAOR hat gezeigt, daß die Wahrscheinlichkeiten $\{P_n\}$ auch mit Hilfe der nicht kumulativen und der kumulativen Poisson-Verteilung gefunden werden können.[1)]

1) Vgl. NAOR (142), S. 280-287. Vgl. auch BHARUCHA-REID (20), S. 410 ff.

$$(5.41) \quad p\left(k, \xi\right) = \frac{\xi^k}{k!} e^{-\xi}$$

$$(5.42) \quad P\left(k, \xi\right) = \sum_{i=k}^{\infty} p\left(i, \xi\right) \quad 1)$$

Er hat nachgewiesen, daß gilt:

$$(5.43) \quad P_n = \frac{\frac{A^n}{n!}\, p\left(M - n, \frac{A \cdot v}{u}\right)}{S(M, A, v/u)} \qquad \text{für } n < A$$

$$(5.44) \quad P_n = \frac{\frac{A^{A-1}}{(A-1)!}\, p\left(M - n, \frac{A \cdot v}{u}\right)}{S(M, A, v/u)} \qquad \text{für } A \leqslant n \leqslant M$$

wobei S(M, A, v/u) durch

$$(5.45) \quad \sum_{i=0}^{A-1} \frac{A^i}{i!}\, p\left(M - 1, \frac{A\ v}{u}\right) + \frac{A^{A-1}}{(A-1)!} \left[1 - P\left(M-A+1, \frac{A \cdot v}{u}\right)\right]$$

gegeben ist.

Die Funktion S (M; A, v/u) kann mit Hilfe der Tafeln von E.C. MOLINA ermittelt werden[2]. Als Parameter wird in diesen Tafeln u. a. der Bruch (A · v)/u verwendet. Ist aber die Arbeitskräfteanzahl sehr groß und/oder der Faktor u/v klein, so übersteigt der Bruch möglicherweise den Wert 100, den höchsten in Molinas Tafeln ausgewiesenen Parameterwert. Aus diesem Grund hat P. NAOR Näherungsformeln für die Wahrscheinlichkeiten $\left\{P_n\right\}$ entwickelt. Hierzu benutzte er eine Normalverteilung[3].

Für praktische Belange dürfte es jedoch immer zweckmäßiger sein, die "Finite Queuing Tables" von PECK und HAZELWOOD zu benutzen.

7. Im folgenden sei das Modell von C. PALM anhand eines Zahlenbeispiels erläutert.

---

1) Diese Funktionen wurden von MOLINA (139) tabelliert.
2) MOLINA (139)
3) Vgl. NAOR (143), S. 334-341

Daten:

M = 12 (Maschinen)
T = 480 (Minuten)
1/u = 20 (Min.) (Mittlere Laufzeit einer Maschine)
1/v = 5 (Min.) (Mittlere Bedienzeit einer Maschine)

Charakteristische Größen

Arbeiteranzahl	1	2	3	4	5
Nutzungszeitgrad %	41,6	77,8	94,0	98,6	99,7
Wartewahrscheinlichkeit D	0,998	0,841	0,459	0,180	0,054
$\bar{T}_h$	1915,2	3585,6	4334,4	4545,6	4593,6
$\bar{T}_n$	480,0	897,6	1080,0	1137,6	1147,2
$\bar{T}_{Ba}$	3364,8	1276,8	345,6	76,8	19,2
$\bar{T}_t$	480,0	897,6	1080,0	1137,6	1147,2
$\bar{T}_w$	-	62,4	360,0	782,4	1252,8

Tabelle 14: Zahlenbeispiel zum Modell von C. PALM

In Abbildung 40 ist der Verlauf des Nutzungszeitgrades in Abhängigkeit vom Personaleinsatz dargestellt. Wie ersichtlich, beeinflußt eine Variation des Bedienungsverhältnisses die Ausbringung in der Weise, daß mit steigendem Arbeitseinsatz die Ausbringung zwar absolut noch zunimmt, jedoch die Grenzerträge fallen.

Aus dieser Tatsache könnte der Schluß gezogen werden, daß hier das aus der Produktionstheorie bekannte "Gesetz des abnehmenden Ertragszuwachses" gültig sei. In der Tat ist dieser Schluß gezogen worden. So T. VOGELSTEIN: "100 Arbeiter werden imstande sein, zunächst immer mehr zu produzieren, je mehr sie mit Kapitalien, sagen wir Webstühlen, ausgerüstet sind. Steigern wir die Maschinenzahl über das Optimum hinaus, so wird absolut die Produktion noch zunehmen, aber relativ zurückgehen. Man steht unter dem Gesetz des abnehmenden Ertrages. Da wird ein Webstuhl eine Zeitlang stillstehen, weil der Faden gerissen ist und der Weber noch an der anderen Maschine beschäftigt ist; da werden die Maschinen schlechter laufen, weil nicht genug Zeit ist, sie

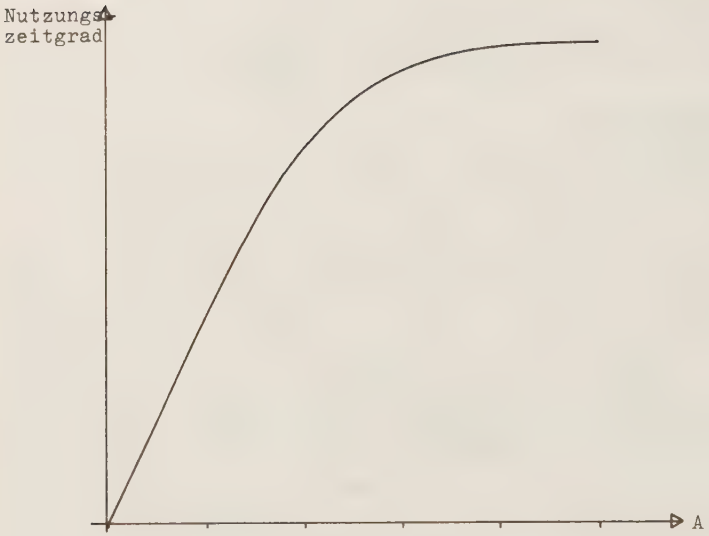


Abb.40: Nutzungszeitgrad in Abhängigkeit der eingesetzten Arbeiteranzahl

in gutem Stand zu halten. Von einem gewissen Punkte an wird der Ertrag sogar absolut zurückgehen und endlich ganz aufhören."[1)]

Zu der Ansicht T. VOGELSTEINS ist folgendes zu bemerken: Zweifellos handelt es sich bei dem von VOGELSTEIN genannten Beispiel um stochastische Mehrstellenarbeit. Die Bedienung mehrerer Webstühle durch einen Weber zählt mit zu den ältesten Beispielen der Mehrstellenarbeit. Fadenbrüche bei Webvorgängen gehorchen den Gesetzmäßigkeiten zufälliger Ereignisse. Wenn auch eine wichtige Prämisse des sog. Ertragsgesetzes erfüllt ist, nämlich die bestandsmäßige Konstanz eines Einsatzfaktors, so darf doch nicht aus der Tatsache abnehmender Grenzerträge bei Variation des Faktors "menschliche Arbeit" geschlossen werden[2)],

1) VOGELSTEIN (199), S. 761-793, hier S. 780 f.
2) Bei VOGELSTEIN wird die Betriebsmittelzahl bei konstantem Arbeitseinsatz variiert.

hier gelte das Ertragsgesetz. Die erste und vierte Phase der ertragsgesetzlichen Ertragsfunktion können bei stochastischer Mehrstellenarbeit nicht nachgewiesen werden. Ein Optimum (als Maximum des Grenzertrages) im Sinne VOGELSTEINS existiert nicht. Auch die Annahme, der Ertrag würde ab einem bestimmten Punkte "...zurückgehen und endlich ganz aufhören" ist völlig unbegründet.
Die Tatsache abnehmender Grenzerträge ist einfach aus dem Phänomen der stochastischen Mehrstellenarbeit zu erklären. Da theoretisch in einem beliebigen Zeitpunkt t alle Maschinen gleichzeitig ausfallen können, ist, um einen Nutzungsgrad von 100 % zu erreichen, die Bedienung einer jeden Maschine durch einen Arbeiter erforderlich. Da jedoch die Wahrscheinlichkeit des Ausfalls von zwei oder mehr Maschinen zu einem Zeitpunkt t praktisch Null ist, steigt die Nutzzeitgradkurve bei einem Einsatz von $A < M$ Arbeitskräften überproportional an. Bei $A = M$ erreicht die Nutzungszeitgradkurve theoretisch den Wert 100 %[1]. Wird der Arbeitseinsatz so gesteigert, daß $A > M$, so wird die "menschliche Arbeit" zum Überschußfaktor. Der Nutzzeitgrad bleibt jedoch bei 100 %.

5112 Die Bestimmung des kostenminimalen Bedienungssystems

Bezeichnen wir die Zeit, die eine Maschine laufen muß, um ein Fertigprodukt herzustellen mit t_h und sind $\bar{x}$ Produkteinheiten herzustellen, so beträgt die erforderliche Laufzeit:

$$T_h = \bar{x} \cdot t_h \tag{5.46}$$

Da das Verhältnis "mittlere Bedienzeit: mittlerer Laufzeit" im vorliegenden Modell konstant ist, ergibt sich für die erforderliche Bedienzeit:

$$T_t = T_n = \bar{x} \cdot t_h \frac{u}{v} \tag{5.47}$$

Als Brachzeit erhält man somit:

1) Praktisch wird dieser Wert wegen der Prämisse der Seltenheitsbedingung bereits früher erreicht.

(5.48) $$M \cdot T - \bar{x} \cdot t_h \left(1 + \frac{u}{v}\right)$$

Die Wartezeit der Arbeiter erhält man durch Subtraktion der Bedienzeit von der Gesamtarbeitszeit:

(5.49) $$T_w = A \cdot T - \bar{x} t_h \frac{u}{v}$$

In gleicher Weise wie bei deterministischer Mehrstellenarbeit setzt sich die zu minimierende Zielfunktion aus den bewerteten Brach- und Wartezeiten zusammen.

(5.50) $$K(A) = \left[M\,T - \bar{x}\, t_h \left(1 + \frac{u}{v}\right)\right] d_n + \left[AT - \bar{x} t_h \frac{u}{v}\right] 1 \longrightarrow \text{Min!}$$

Diese Zielfunktion ist unter Beachtung folgender Nebenbedingungen zu minimieren:
Die zur Erstellung von $\bar{x}$ e r f o r d e r l i c h e Nutzungszeit muß mindestens gleich der beim Arbeitseinsatz von A Arbeitern e r z i e l b a r e n Nutzungszeit sein, also:

(5.51) $$\bar{x} \cdot t_h \left(1 + \frac{u}{v}\right) \leqslant T \left[M - \sum_{n=A}^{M} (n - A)\, P_n\right]$$

oder in der Schreibweise von PECK und HAZELWOOD

(5.52) $$\bar{x} \cdot t_h \left(1 + \frac{u}{v}\right) \leqslant T \cdot N \cdot F$$

Weiterhin muß sichergestellt sein, daß

(5.53) $$T \geqslant \bar{x}\, t_h \left(1 + \frac{u}{v}\right),$$

daß also die Planperiode mindestens gleich der erforderlichen Nutzungszeit ist.

Für ein gegebenes T, das die Bedingung (5.53) erfüllt, ist diejenige Arbeiteranzahl optimal, die die Bedingung (5.51) zum ersten Mal erfüllt. Eine weitere Steigerung des Arbeitseinsatzes würde nur zu erhöhten Brach- und Wartezeiten führen.

Zahlenbeispiel

t_h = 25 (Min/Stück) ; d_n = 0,03 (DM/Min)
$\bar{x}$ = 170 (Stück) ; 1 = 0,26 (DM/Min)

$\frac{u}{v + u}$ = 0,20; $\frac{u}{v}$ = 0,25

M = 12 (Maschinen)

Erforderliche Nutzungszeit = 170 · 25 · 1,25 = 5312,5 (Min)
Die Planperiode sei auf 480 (Min/Maschine bzw. Arbeiter) festgelegt.
Der erforderliche Nutzungszeitgrad beträgt somit:

$\frac{5312,5}{12 \cdot 480} \cdot 100 = 92,23\ \%$

Um diesen Nutzungszeitgrad zu erreichen, müssen laut Tafel von PECK und HAZELWOOD[1] 3 Arbeitskräfte eingesetzt werden. Somit ergibt sich:

Zeitkategorie	Zeitwert	Kostensatz	Kosten
Brachzeit	447,5	0,03	13,43
Wartezeit	377,5	0,26	98,15
Summe	-	-	111,58

Würde man dagegen fordern, die Planherstellmenge in einer Planperiode von 450 (Min/Maschine bzw. Arbeiter) zu fertigen, so würde der erforderliche Nutzzeitgrad auf 98,37 % steigen. Um diesen zu realisieren, wären (lt. Tafel von PECK und HAZELWOOD) 4 Arbeiter erforderlich. Die Brachzeiten würden auf 87,5 (Min) zurückgehen und die Wartezeiten auf 737,5 (Min) steigen. Die Kosten beliefen sich auf 194,38 (DM).

Das Beispiel legt die Frage nahe, ob der Zeitgewinn von 30 (Min pro Maschine bzw. Arbeiter) der Unternehmensleitung 82,80 (DM) (Differenz der Kosten) "wert" sind. Dies jedoch ist eine Frage der Ausnutzung von Maschinenkapazitäten bzw. der Voll- oder Unterbeschäftigung. Diese Frage mündet somit in eine Betrachtung ein, die mit Kostenminimierung für eine g e g e b e n e Menge nichts mehr zu tun hat. Hier sind vielmehr Überlegungen erforderlich, die eine Maximierung des Gewinns zum Gegenstand haben.

1) Vgl. PECK-HAZELWOOD (158), S. 12

5113 Die Bestimmung des gewinnmaximalen Bedienungssystems

Geht man der Anschaulichkeit halber von einem (Netto-) Marktpreis aus, zu dem beliebige Mengen abgesetzt werden können, so erhält man als Deckungsbeitrag:

$$(5.54) \qquad c = p - (t_h \cdot d_h + t_n (d_n + 1) + k^*)$$

Kurzzeichen

c	Deckungsbeitrag (DM/Stück)
p	Nettomarktpreis (DM/Stück)
t_h	Maschinenlaufzeit (Min/Stück)
d_h	Kostensatz Maschinenlaufzeit (DM/Min)
t_n	Bedienzeit (Maschinennebenzeit, Tätigkeitszeit) (Min/Stück)
d_n	Kostensatz Maschinennebenzeit (DM/Min)
l	Lohnsatz (DM/Min)
k^*	Sonstige Stückkosten (DM/Stück)

Bezieht man den Deckungsbeitrag auf die Maschinenlaufzeit t_h, so erhält man:

$$(5.55) \qquad c_h = \frac{c}{t_h}$$

Für die Zielfunktion des zu maximierenden Gewinns erhält man somit:

(5.56)

$$G(A) = \underbrace{x \cdot t_h \cdot c_h}_{\text{Stückzahl} \cdot \text{Laufzeit/Stück} \cdot \text{Deckungsbeitrag pro Einheit der Laufzeit}} - \underbrace{\left[\bar{M} \cdot T - x t_h \left(1 + \frac{u}{v}\right)\right] \cdot d_n}_{\text{Bewertete Brachzeiten}} - \underbrace{\left[A \cdot T - x t_h \frac{u}{v}\right] l}_{\text{Bewertete Wartezeiten}} \longrightarrow \text{Max!}$$

Die Maximierung muß unter Beachtung der folgenden Nebenbedingungen vorgenommen werden.

$$(5.57) \qquad x = \frac{T\left(M - \sum_{n=A}^{M} (n - A)\, P_n\right)}{t_h}$$

Die Bedingung (5.57) läßt deutlich erkennen, daß die Ausbringungsmenge x vom Personaleinsatz abhängig ist. Durch parametrische Abwandlung

der Arbeitskräfteanzahl A läßt sich somit ein Maximum von (5.56) bestimmen.

Zahlenbeispiel

t_h	= 25 (Min/Stück)	c_h	= 0,22 (DM/Min)
u/v	= 0,25	d_n	= 0,03 (DM/Min)
u (v+u)	= 0,20	l	= 0,26 (DM/Min)
M	= 12 (Maschinen)		
T	= 480 (Min/Maschinen bzw. Arbeiter)		

Nach den Tafeln von PECK und HAZELWOOD[1] erhält man die Nutzungszeitgrade und damit folgende Lösungswerte:

Arbeiteranzahl	1	2	3	4	5
Nutzungszeitgrad (%)	41,6	77,8	94,0	98,6	99,7
Laufzeit (Min)	1916,93	3585,02	4331,52	4543,49	4594,18
Brachzeit (Min)	3363,84	1278,72	345,60	80,64	17,28
Wartezeit (Min)	0,77	63,74	357,12	784,13	1251,46
Gewinn (DM)	320,60	733,77	849,71	793,28	684,82

Mit dem Einsatz von 3 Arbeitern wird ein maximaler Gewinn erzielt.

5114 Der Einfluß mehrstelliger Gruppenarbeit auf die Effizienz des Bedienungssystems

Das gewinnmaximale Bedienungssystem liegt im Zahlenbeispiel zu C. PALMS Modell bei drei Arbeitern. Da insgesamt 12 Maschinen zu bedienen waren, beträgt das **Bedienungsverhältnis 1 : 4**. Vom produktionstheoretischen Standpunkt her, ist es interessant zu fragen, ob die Effizienz des Systems die gleiche bleibt, wenn man das Gesamtsystem in voreinander unabhängige Teilsysteme aufspaltet, etwa derart, daß ein Arbeiter vier Maschinen bedient. Aus den Tafeln von PECK und HAZELWOOD erhält man die Nutzzeitgrade und die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Maschine warten muß, für die mögliche Gruppenbildung.

1) Vgl. ebenda, S. 12

Anzahl Maschinen	4	8	12
Anzahl Arbeiter	1	2	3
Nutzungszeitgrad %	86,2	91,6	94
Wartewahrscheinlichkeit	0,549	0,499	0,459

Tabelle 15

Aus der Tabelle ist sofort ersichtlich, daß die Effizienz des Systems bei mehrstelliger Gruppenarbeit sehr viel größer ist, als bei mehrstelliger Einzelarbeit. Dieses Ergebnis ist zunächst überraschend, handelt es sich doch nur um eine multiple Vermehrung homogener Maschinen und gleich qualifizierter Arbeiter. Dieser Effekt ist jedoch mit Hilfe wahrscheinlichkeitstheoretischer Überlegungen leicht zu erklären[1].

Geht man von mehrstelliger Einzelarbeit aus und verdoppelt oder verdreifacht man Stellen- und Arbeiteranzahl, so bleibt die Wahrscheinlichkeit für den Ausfall einer Maschine unter der Prämisse homogener Maschinen konstant. Die Wahrscheinlichkeit für den gleichzeitigen Ausfall von zwei, drei oder mehr Maschinen ist dagegen gleich dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten und vermindert sich entsprechend. Das bedeutet, daß bei mehrstelliger Einzelarbeit die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine ausfallende Maschine warten muß, wesentlich höher ist, als bei Gruppenarbeit. Bei mehrstelliger Gruppenarbeit wird also früher ein Arbeiter zur Bedienung der Maschinen zur Verfügung stehen; somit kann der Nutzungszeitgrad ansteigen.

Praktisch bedeutet dies, daß durch Zusammenlegung von Arbeitsplätzen die Produktivität bei stochastischer Mehrstellenarbeit gesteigert werden kann[2]. Dem Bedienungsverhältnis als relative Kennziffer ist bei stochastischer Mehrstellenarbeit kein Aussagewert zuzumessen.
Eine diesbezügliche Untersuchung von THEIL, BOOT und KLOEK verleitet diese zu dem Schluß: "Despite the fact that there are fewer repairmen

1) Vgl. MATHIEU-LEHMANN (130), S. 29, S. 76
2) Allerdings müssen korrekterweise die Wegzeiten berücksichtigt werden, die diesen Effekt sicherlich mindern.

relative to the number of machines, the loss due to waiting machines is smaller (per machine). This interesting conclusion is an indication of one of the advantages of the large company over the small. It is an instance of the well-known phenomenon called » economies of scale« "[1]. In diesem Zitat wird der Effekt steigender Ausbringung bei multipler Arbeitsplatzgrößenvariation durch einfache "Betriebsgrößenvariation" erklärt. Wir haben zu zeigen versucht, daß dieses Phänomen wahrscheinlichkeitstheoretisch erklärt werden kann.

512 Modelle der Grundform 1 mit nicht-exponentieller Verteilung der Bedienungszeiten

5121 Konstante Bedienungszeiten - Das Modell von H. ASHCROFT (M/D/1)

Im Jahre 1950 entwickelte H. ASHCROFT für die Grundform 1 ein Modell unter den im Kapitel 5111.1 genannten Prämissen mit der Ausnahme, daß die Zeit, die eine Arbeitskraft zur Bedienung einer Maschine benötigt, eine k o n s t a n t e Größe ist[2]. Überdies geht er von der Annahme aus, daß nur ein Arbeiter eine Anzahl von Maschinen zu bedienen hat, deren Umfang optimal bestimmt werden soll (mehrstellige Einzelarbeit). NAOR hat in einer Analyse des Ashcroftschen Modells gezeigt, daß es - unter den genannten Voraussetzungen - dem Modell von PALM gleich ist[3].

BENSON und COX geben die Lösung von ASHCROFT in einer etwas anderen Form an[4]. Sie nehmen an, daß sich die Bedienung einer Maschine in m Stufen vollzieht. Die Bedienungszeit jeder Stufe ist exponential verteilt mit dem Mittelwert 1/v. Sie behaupten dann, daß die gesamte Bedienungszeit eine χ^2-verteilte Variable mit 2m Freiheitsgraden und dem Mittelwert m/v sei[5]. Streben m und v in der Weise gegen unendlich, daß m/v konstant bleibt, so leigt der Fall konstanter Bedienungszeiten vor[6].

1) THEIL-BOOT-KLOEK (188), S. 168
2) ASHCROFT (5), S. 145-151. Vgl. auch COX-SMITH (35), S. 101 f.; RIES (163), S. 71 f.
3) Vgl. NAOR (142), S. 285 f.
4) Vgl. BENSON-COX (14), S. 65-82
5) Gemeinhin wird angenommen, daß sich eine χ^2-verteilte Variable aus einer Summe normalverteilter Zufallsvariablen zusammensetzt.
6) Vgl. auch COX (34), S. 285-287.

ASHCROFT hat die mittlere Anzahl laufender Maschinen in Abhängigkeit von p = u/v und N (Anzahl Maschinen) tabelliert.[1] Ein Teil der ASHCROFT-Tabelle wurde in "Textil-Praxis" (Juni 1955, S. 562) abgedruckt[2]. Auch bei S. EILON findet man die Tabelle von ASHCROFT[3]. Allerdings wird hier der Laufzeitgrad als Funktion von p und N angegeben.

In Tabelle 16 wurde der Hauptzeitgrad für das Modell von ASHCROFT und das Modell von PALM in Anhängigkeit der angegebenen Parameterwerte für den Fall angegeben, daß ein Arbeiter eine Gruppe von M Maschinen bedient.

Anzahl zu bedienender Maschinen M	u/v = 0,15 $X = \frac{u}{u+v} = 0{,}13$			u/v = 0,25 $X = \frac{u}{u+v} = 0{,}20$			u/v = 0,35 $X = \frac{u}{u+v} = 0{,}26$		
	Ashcroft γ_A	Palm γ_P	$\frac{\Delta\gamma}{\gamma_A} 100$	Ashcroft γ_A	Palm γ_P	$\frac{\Delta\gamma}{\gamma_A} 100$	Ashcroft γ_A	Palm γ_P	$\frac{\Delta\gamma}{\gamma_A} 100$
4	83,9	81,9	2,39	72,3	69,0	4,57	61,3	57,7	5,88
5	82,2	79,5	3,29	67,7	64,3	5,03	54,3	51,4	5,35
6	80,0	76,7	4,13	62,1	58,9	5,16	47,0	45,4	3,41
7	77,2	73,7	4,54	55,8	53,5	4,13	40,7	40,0	1,72
8	73,7	70,2	4,75	49,7	48,5	2,42	35,7	35,4	0,85
9	69,5	66,4	4,47	44,4	43,8	1,36	31,7	31,0	0,68
10	64,8	62,5	3,55	40,0	39,8	0,50	28,6	28,4	0,70

Tabelle 16: Hauptzeitgrade (%) und prozentuale Abweichung

Im Modell von PALM bezeichnet 1/v die "mittlere Bedienzeit" einer Maschine, im Modell von ASHCORFT dagegen genau die "Bedienzeit" einer Maschine.
Aus Tabelle 16 und der folgenden Abbildung 41, wo die prozentuale Abweichung des Hauptzeitgrades der beiden Modelle für verschiedene X-Werte dargestellt ist, läßt sich die Tendenz erkennen, daß mit steigendem Anteil der Bedienungszeit an der Nutzungszeit die Abweichungen bei geringen Betriebsmittelzuteilungen größer, bei kleinem Bedienungsver-

1) ASHCROFT (5), S. 149 f.
2) (151), S. 562
3) EILON (45), S. 180, 181.

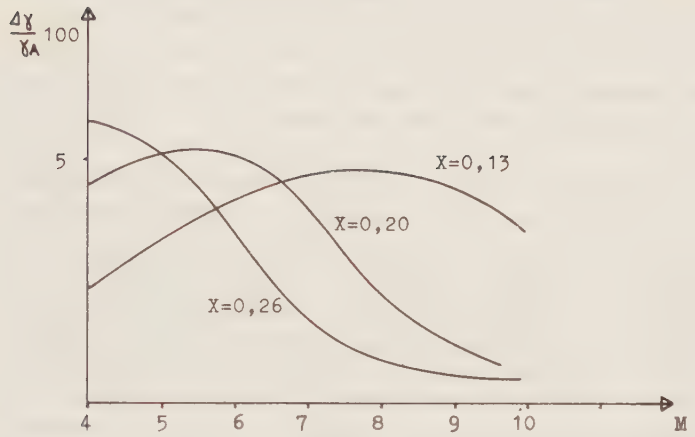


Abb.41: Prozentuale Abweichung des Hauptzeitgrades

hältnis jedoch größer werden. Die im Durchschnitt auftretende Abweichung ist kleiner als 5 %. Der Hauptzeitgrad bei exponential verteilten Bedienungszeiten liegt immer unter dem Hauptzeitgrad des ASHCROFT-Modells.

5122 Erlang-Verteilung der Bedienungszeiten; das Modell von E. DARU ($M/E_k/1$)

1. Die Prämissen des Modells von E. DARU sind die gleichen wie im Modell von C. PALM mit der Ausnahme, daß die Bedienungszeiten einer Erlang-Verteilung gehorchen[1].

Die gesamte Bedienungszeit einer Maschine durch einen Arbeiter wird in k-Phasen zerlegt. Die Einheiten werden wie folgt abgefertigt:

(a) Im "Bedienungskanal" befindet sich maximal eine Einheit. E. DARU geht also in gleicher Weise wie ASHCROFT von mehrstelliger Einzelarbeit aus.

1) Vgl. DARU (40), S. 301-312; vgl. auch SASIENI-YASPAN-FRIEDMANN (169), S. 154 f; RUIZ-PALA-TOLRA (166), S. 300-315. Zur Erlang-Verteilung vgl. auch Kapitel 324.

(b) Die zu bedienende Maschine "durchläuft" sukzessiv die Phasen 1, 2, ..., k. Die Bedienungszeit in jeder Phase ist eine nicht negativ verteilte Zufallsvariable mit dem mittleren Wert 1/v bzw. 1/v'k.

(b) Sobald eine Maschine die k-te Phase verläßt, ist der Bedienungskanal zur Aufnahme einer neuen Einheit frei.

2. Die Vorteile der Erlang-Klasse der Verteilungen der Bedienungszeiten wurden bereits im Kapitel 324 erläutert. Insbesondere fällt für praktische Probleme ins Gewicht, daß die meisten Verteilungsfunktionen der Bedienungszeiten angenähert durch eine Funktion aus der Erlang-Klasse der Verteilungen wiedergegeben werden kann. Dieser Vorteil wird jedoch mit einem erheblichen rechentechnischen Nachteil erkauft. Durch die Aufteilung der Bedienungszeit in k-Phasen wird die Anzahl der Gleichungen zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten $\{P_n(t)\}$ sehr viel größer. Die Anzahl der Gleichungen vervielfacht sich näherungsweise um k.[1] Bei großen Maschinenanzahlen und großem k wird der rechentechnische Aufwand sehr groß. Bedenkt man jedoch die Tatsache, daß die Lösung dieses Modells mit $1 \leq k \leq \infty$ immer zwischen der des Modells von C. PALM (k = 1) und der des Modells von H. ASHCROFT ($k = \infty$) liegen muß, so ist zu bezweifeln, ob der rechentechnische Aufwand gerechtfertigt ist[2]. Wie nämlich oben gezeigt werden konnte, unterscheidet sich der Hauptzeitgrad in diesen Modellen nur unwesentlich, so daß im praktischen Fall eine Interpolation zwischen diesen Werten angezeigt erscheint.

Aus diesem Grund sei auf eine Darstellung des Modells von E. DARU hier verzichtet. Es sei lediglich festgehalten, daß eine exakte Lösung für eine beliebige Funktion aus der Erlang-Klasse der Bedienzeitverteilung ermittelt werden kann.

---

1) Genau um (k-1). Vgl. DARU (40), S. 302 und S. 304.

2) Vgl. hierzu die Untersuchung von LEHMANN (121), Kap. 4, S. 60 ff. LEHMANN kommt zu dem Schluß, "... daß die Form der Bedienungszeitverteilung keinen entscheidenden Einfluß auf die Ergebnisse des Modells ausübt. Es ändert sich zwar die Verteilung der Anzahl laufender Stellen...geringfügig, wenn man mit exponentialverteilten anstelle von gamma- oder mischverteilten Bedienungszeiten rechnet, doch sind die Abweichungen der mittleren Anzahl laufender Stellen kaum nennenswert." (S. 79)

5123 Allgemeine Verteilung der Bedienungszeiten; das Modell von L. TAKACS (M/G/1)

Bisher wurden nur Wartesysteme betrachtet, bei denen sich die Verteilung der Bedienungszeiten aus endlich oder unendlich vielen exponential verteilten Phasen beschreiben ließ. Zusammen mit der Annahme exponential verteilter Maschinenlaufzeiten konnte zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten $\{P_n(t)\}$ auf die Theorie der Markov-Prozesse zurückgegriffen werden.

Für ein Wartesystem mit einer allgemeinen Verteilung der Bedienungszeiten - also M/G/1 - konnte L. TAKACS im Jahre 1957 mit Hilfe der von D. G. KENDALL entwickelten "Methode der eingebetteten Markov-Kette"[1] eine theoretisch exakte Lösung aufzeigen[2]. Allerdings erweist sich die Analyse eines solchen Modells als sehr schwierig.

Gedrungene Darstellungen des Modells finden sich bei A. T. BARUCHA-REID[3], F. FERSCHL[4] und P. LE GALL[5]. Aus diesem Grund sei hier auf eine Wiedergabe verzichtet.
Der Einfluß einer allgemeinen Bedienungszeitverteilung auf die das Wartesystem charakterisierenden Größen ist bei einer numerischen Auswertung so groß, daß eine Ermittlung dieser ohne Hilfe größerer Rechenanlagen nicht möglich ist.

513 Ein Modell mit einer allgemeinen Verteilung der Zwischenankunfts- und Bedienungszeiten; das Modell von N. BECKER

Die vielfältigen Modelle der Warteschlangentheorie mit speziellen Input- und Outputverteilungen legen den Gedanken nahe, ein allgemeines Modell aufzustellen, das alle diese speziellen Modelle als Spezialfälle enthalten soll.
Für das geschlossene System ist in einer Arbeit jüngeren Datums von N. BECKER (9) ein erster wesentlicher Schritt getan worden.
Eine Darstellung der mathematischen Analyse dieses Modells soll hier nicht erfolgen; der Verfasser möchte sich auf eine kurze verbale Dar-

1) Vgl. KENDALL (100), S. 338-354
2) Vgl. TAKACS (184), S. 92-105
3) BHARUCHA-REID (20), S. 414-419
4) FERSCHL (51), S. 140-141
5) LE GALL (120), S. 428-430

stellung beschränken.

In der Arbeit von N. BECKER wird folgendes allgemeines geschlossenes Warteschlangenmodell mathematisch analysiert:

Zwei Maschinen fallen stochastisch aus. Die stochastische Variable "Laufzeit der Maschine m" habe eine allgemeine, aber stetig differenzierbare Dichtefunktion $l_m(x)$ · (m = 1,2). Die Maschinen werden von einem Arbeiter bedient [1]. Nicht zu dieser Bedienung soll die Behebung von Defekten gehören, die aufgrund von Verschleißerscheinungen an den Maschinen auftreten. Die Bedienungszeiten sind ebenfalls stochastisch und es wird angenommen, daß die stochastische Variable "Bedienzeit der Maschine m" eine allgemeine, aber stetig differenzierbare Dichtefunktion $r_m(x)$ (m = 1,2) habe.

Dieses geschlossene Warteschlangenmodell wird im zeitlichen Ablauf unter der Anfangsbedingung: "zu Beginn der Betrachtung (t = 0) werden beide Maschinen eingeschaltet und laufen" analysiert. Wichtigste Größen im zeitlichen Ablauf sind die von t abhängigen Zustandswahrscheinlichkeiten $p_n(t) := \{$ In t stehen n Maschinen $\}$ (n = 0, 1, 2). Ihre Bestimmung ist das Hauptproblem der Arbeit.

N. BECKER hat in seiner Studie gezeigt, daß die $p_n(t)$ nicht d i r e kt aus dem Modell gefolgert werden können, sondern i n d i r e k t über hypothetisch angenommene Dichten (in der Arbeit die Funktionen "w") bestimmt werden können.
Im Kapitel 335 vorliegender Arbeit haben wir kurz diese Lösungsmethode skizziert. Wir wollen deshalb hier nicht näher darauf eingehen.

Das Endergebnis der Beckerschen Arbeit ist ein recht kompliziertes Integralgleichungssystem für die hypothetischen Dichten. Dieses kann, nachdem man spezielle Dichtefunktionen einsetzt mit den gängigen Lösungsverfahren gelöst werden. Mit diesen Dichten können dann die $p_n(t)$ bestimmt werden.

BECKER hat im zweiten Teil der Arbeit durch Einsetzen von Exponentialverteilungen für Lauf- und Bedienzeit die Ergebnisse des Palm-Modells aus seinem Modell hergeleitet.

---

1) Die Möglichkeit, daß die Maschinen von mehreren Arbeitern bedient werden, ist gegeben, allerdings mit der Maßgabe, daß alle an einer Maschine arbeiten.

52 Modellgruppe II: Turnusbedienung

521 Modell: Grundform 1 der Mehrstellenarbeit; konstante Bedienungs- und Wegzeiten. Das Modell von Mack - Murphy - Webb (M/D/1)

5211 Prämissen und Darstellung des Modells

1. In diesem Kapitel wird ein stochastisches Modell der Mehrstellenarbeit dargestellt, in dem ein Arbeiter eine Anzahl von Maschinen, von 1, 2, ..., N indiziert, auf einem Turnus begeht, kontrolliert und gegebenenfalls bedient, falls eine Maschine stehend angetroffen wird.

An eine Arbeit von D. BRUNNSCHWEILER[1] aus dem Jahre 1954 anknüpfend, wurde folgendes Modell von Mack, Murphy und Webb 1957 aufgestellt[2]. Kurze Zeit später wurde das Modell durch C. Mack auf den Fall variabler Bedienungszeiten erweitert[3].

Kurzzeichen:

N	: =	Anzahl - von einer Arbeitskraft - zu bedienender Maschinen
k_i	: =	Zeit, die der Arbeiter benötigt, um von der (i - 1)ten Maschine zur i-ten Maschine zu gehen einschließlich Inspektion und Routinearbeiten (ohne Bedienzeit)
K	: =	Mittlere Zeitdauer für den Weg von einer zur unmittelbar folgenden Maschine einschließlich Inspektion und Routinearbeiten
M	: =	Mittlere Anzahl von Reparaturfällen an einer Maschine in einer Zeiteinheit
1/M	: =	Mittlere Laufzeit einer Maschine
C	: =	Bedienzeit für eine Maschine
R	: =	Mittlerer Laufzeitgrad aller Maschinen (Hauptzeitgrad)
T	: =	Mittlere Zeitdauer eines Turnus des betreuenden Arbeiters
S	: =	Anzahl auf einem Turnus stillstehender Maschinen
	: =	Laufzeit einer Maschine
a	: =	exp (MC) } Hilfsgrößen
b	: =	exp (NMK) }

1) BRUNNSCHWEILER (30), S. T 886-T 895
2) Vgl. MACK-MURPHY-WEBB (126), S. 166-172
3) MACK (127), S. 173-178

2. Prämissen des Modells

21 Der Input-Prozeß

(1) Der Arbeitsplatz besteht aus homogenen Arbeitsstellen (Maschinen, Aggregaten). Die Arbeitsstellen sind im Produktionsprozep nicht verkettet.

(2) Alle Maschinen sind mit den gleichen Arbeitsgegenständen belegt.

(3) Die Laufzeiten der Maschinen sind exponential verteilt, d.h.

$$(5.58) \quad A(t) = p(\theta \leq t) = \int_0^t Me^{-Mx}\,dx = 1 - e^{-Mt}$$

(4) Die Maschinen laufen unabhängig voneinander

Folgerung aus (1) - (4):

Die Wahrscheinlichkeit, daß in einem kleinen Zeitintervall mehr als eine Maschine ausfällt ist o(dt). Läuft die Maschine zur Zeit t, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Maschine vor der Zeit t + dt ausfällt: M dt + o(dt).

22 Der Output-Prozeß

(1) Der Arbeitsplatz wird von einem Arbeiter bedient.

(2) Die Bedienungszeit einer ausgefallenen Maschine ist eine Konstante C

(3) Die Zeit, die eine Arbeitskraft benötigt, um von der (i-1)ten Maschine zur Maschine i zu gehen, ist eine Konstante k_i. Es gilt:

$$(5.59) \quad \sum_{i=1}^{N} k_i = NK$$

NK ist somit die gesamte Wegzeit eines Turnus.

23 Ergänzungen

(1) Es wird angenommen, daß die Maschinen in der Reihenfolge benummert sind, wie der Turnus abzugehen ist.

(2) Der Arbeitsablauf des Arbeiters gestaltet sich nach folgenden Regeln:

(I) Der Turnus beginnt zur Zeit t = 0 bei Maschine 1; Anwendung von Regel II

(II) Der Arbeiter registriert, ob die Maschine, vor der er sich befindet, entweder in Position O (Maschine läuft) oder in Position 1 (Maschine läuft nicht) ist; Anwendung von Regel III

(III) Ist die Maschine in Position O, so erledigt er die Routinearbeiten (bei laufender Maschine) und geht zur nächsten Maschine und wendet Regel II an.

Ist die Maschine in Position 1, so bedient er die Maschine, geht nach abgeschlossener Bedienung zur nächsten Maschine und wendet Regel II an.

(3) Die Wahrscheinlichkeit, daß die Laufzeit einer Maschine größer ist als eine vorgegebene Zeitdauer g, ist

(5.60)
$$p(\theta > g) = 1 - p(\theta \leq g) \qquad (g > 0)$$
$$= 1 - \int_0^g M e^{-Mx}\, dx$$
$$= 1 - (1 - e^{-Mg})$$
$$= e^{-Mg}$$

3. Herleitung der Systemgleichungen

Voraussetzung: Es soll gelten $k_i = K \qquad (i = 1, \ldots, N)$

Definition: $p_L(i, j, \ldots, s) := p(\{$ Der Arbeiter beginnt den Rundgang bei Maschine L und muß von L aus gezählt die i-te, j-te, ..., s-te Maschine bedienen, bis er wieder bei der Maschine L ankommt $\})$

Nehmen wir an, daß der Arbeiter auf diesem Turnus v o n d e n (N - 1) v e r b l e i b e n d e n M a s c h i n e n S Maschinen bedienen muß, so benötigt er:

SC Zeiteinheiten zur Bedienung
NK Zeiteinheiten für die Wegzeit

insgesamt also SC + NK Zeiteinheiten.
Nach (5.60) gilt also:

$p(\{$ Maschine L läuft noch nach dem Turnus $\})$

(5.61) $= \exp(-M(SC + NK))$

$\Rightarrow p(\{$ Maschine L läuft nicht mehr nach dem Turnus $\})$

(5.62) $= 1 - \exp(-M(SC + NK))$

Aus den Prämissen (1) bis (4) des Input-Prozesses folgt:

$p(\{$ i-te, j-te, ..., s-te Maschine stehen $\cap$ Maschine L läuft noch nach dem Turnus $\})$

(5.63) $= p_L(i, j, \ldots, s) \cdot \exp(-M(SC + NK))$

Sei M die auf L folgende Maschine. Analog zu $p_L(i, j, \ldots, s)$ definieren wir $p_M(i, j, \ldots, s)$

Nun wird versucht, diese Wahrscheinlichkeit durch Rückschluß auf $p_L(i, j, \ldots, s)$ auszudrücken:

a) $\underline{s \neq N - 1}$

$\{$ von Maschine M gezählt stehen die i-te,..., s-te Maschine$\}$
$=\{$von Maschine L gezählt stehen die (i+1)te,...,(s+1)te Maschine $\cap$ Maschine L läuft nach dem Turnus$\} \cup \{$ von Maschine L gezählt stehen die 1., (i+1)te, ..., (s+1)te Maschine $\cap$ Maschine L läuft nach dem Turnus$\}$

(5.64) $p_M(i, j, \ldots, s)$
$= p_L(i+1, j+1, \ldots, s+1) \cdot \exp(-M(SC + NK))$
$+ p_L(1, i+1, j+1, \ldots, s+1) \cdot \exp(-M(S+1)C + NK))$

b) $\underline{s = N - 1}$

$\{$von Maschine M gezählt stehen die i-te, ..., r-te, (N-1)te Maschine $\}$ = $\{$ von Maschine L gezählt stehen die (i+1)te, ..., (r+1)te, Maschine $\cap$ Maschine L steht nach dem Turnus$\} \cup$ $\{$ von Maschine L gezält stehen die 1., (i+1)te, ..., (r+1)te Maschine $\cap$ Maschine L steht nach dem Turnus$\}$

(5.65) $p_M(i, j, \ldots, r, N-1)$
$= p_L(i+1, j+1, \ldots, r+1)\ (1-\exp(-M(SC + NK))$
$+ p_L(1, i+1, \ldots, r+1)\ (1-\exp(-M((S+1)\ C + NK))$

Wegen der Prämissen 21 (1), 21 (4) und 22 (2) können die Indizes an den Wahrscheinlichkeiten weggelassen werden, da die Ereignisse innerhalb eines Turnus unabhängig von der (speziellen) Maschine, an der der Arbeiter beginnt, sind. Setzen wir noch voraus, daß die p(i, j,

..., s) unabhängig von den speziellen Werten i, j, ..., s sind:

$$p(i, j, \ldots, s) = p(S) := p\{\text{der Arbeiter beginnt den Turnus an einer Maschine} \cap \text{von den restlichen N-1 Maschinen fallen S aus}\}$$

Die Gleichungen (5.64) und (5.65) reduzieren sich dann wie folgt:

(5.64)

$$p(S)\ \exp(-M\ (SC + NK)) + p(S+1)\ \exp(-M\ ((S+1)\ C + NK)) = p(S)$$

(5.65)

$$p(S)(1 - \exp(-M(SC+NK)) + p(S+1)(1-\exp(-M((S+1)\ C + NK)) = p(S+1)$$

Vereinfacht man die zweite Gleichung, so erkennt man, daß sie mit der ersten Gleichung identisch ist.
Es ergibt sich somit die folgende allgemeine Rekursionsformel, die ohne Einschränkung gilt:

(5.66)
$$p(S+1) = p(S)\left[1 - \exp(-M\ (SC + NK)\right]\ \exp\left[M((S+1)\ C + NK)\right]$$
$$= p(S)(1 - a^{-S} b^{-1})\ a^{S+1}\ b \quad ^{1)}$$
$$= p(S)(a^{S+1}\ b - a)$$

$$p(S+1) = p(S)\ a\ (a^{S}\ b - 1)$$

Es ist jetzt noch zu zeigen, daß die errechneten Zustandswahrscheinlichkeiten unabhängig von der speziellen Wahl der ausgefallenen Maschinen sind. Hierzu wählen wir S Maschinen

1. aus dem Turnus ohne die Maschine, an der der Arbeiter beginnt:
   $= P_1(S)$
2. aus dem Turnus mit der Maschine, an der der Arbeiter beginnt:
   $= P_2(S)$

Die Wahrscheinlichkeit für den Ausfall dieser speziell gewählten Maschinen bezeichnen wir zur Unterscheidung der allgemeinen Zustandswahrscheinlichkeiten mit P(S).

1. $P_1(S) = p(\{$ S Maschinen aus den N-1 übrigen Maschinen fallen aus $\cap$ Maschine, an der der Turnus beginnt läuft noch $\})$

1) Vgl. die Hilfsgrößen a und b auf S. 193

(5.67) $$P_1(S) = p(S) \exp(-M(SC + NK))$$
$$= p(S) / (ba^S)$$

2. $P_2(S) = p(\{$ S-1 Maschinen aus den N-1 übrigen Maschinen fallen aus $\cap$ Maschine, an der der Turnus beginnt steht $\})$

(5.68) $$P_2(S) = p(S-1)(1 - \exp(-M((S-1)C + NK))$$
$$= p(S-1)(1 - 1 / (ba^{S-1}))$$

Es soll gezeigt werden: $P_1(S) = P_2(S)$
Ersetzt man in (5.67) $p(S)$ durch (5.66), so erhält man:

$$P_1(S) = p(S-1)\, a(a^{S-1}b - 1) / (ba^S)$$

$$= p(S-1)\, \frac{a^S b - a}{ba^S}$$

$$= p(S-1)\, (1 - \frac{a}{ba^S})$$

$$= p(S-1)\, (1 - \frac{1}{ba^{S-1}})$$

$$= P_2(S)$$

$$\Longrightarrow \quad P_1(S) = P_2(S)$$

Hieraus folgt: Für die Wahrscheinlichkeit, daß v o n d e n N M a s c h i n e n S spezielle Maschinen ausfallen, gilt:

(5.69) $$P(S) = p(S)\, b^{-1}\, a^{-S}$$

Setzen wir dieses Ergebnis in (5.66) ein, so erhält man:

$$P(S+1)ba^{S+1} = P(S)\, ba^S\, a(a^S b - 1)$$

woraus sofort folgt:

(5.70) $$\boxed{P(S+1) = P(S)\,(a^S b - 1)}$$

4. Bestimmung der Zustandswahrscheinlichkeiten

Aus N Maschinen lassen sich S spezielle Maschinen auf $\binom{N}{S}$ Arten auswählen, woraus folgt

(5.71) $$p(S) = \binom{N}{S} P(S),$$

d.h. $p(\{S \text{ Maschinen stehen}\}) = \binom{N}{S} p(\{S \text{ spezielle Maschinen stehen}\})$

Wegen $$\sum_{S=0}^{N} p(S) = 1$$

gilt

(5.72) $$\sum_{S=0}^{N} \binom{N}{S} P(S) = 1$$

Zur Bestimmung von P(S) benutzt man die Rekursionsformel (5.70), also

(5.73) $$P(S) = (a^{S-1}b - 1)(a^{S-2}b - 1)\ldots(ab - 1)(b - 1)\, P(0)$$

P(0) wird aus (5.72) bestimmt

(5.74) $$P(0) = 1 - \sum_{S=1}^{N} \binom{N}{S} P(S)$$

Sei $$\bar{P}(S) := \frac{P(S)}{P(0)}$$

so folgt $$P(0) = 1 - P(0) \sum_{S=1}^{N} \binom{N}{S} \bar{P}(S)$$

bzw. $$P(0) \left[1 + \sum_{S=1}^{N} \binom{N}{S} \bar{P}(S) \right] = 1$$

bzw. $$P(0) = \frac{1}{1 + \sum_{S=1}^{N} \binom{N}{S} \bar{P}(S)}$$ [1)]

1) Bei Mack, Murphy und Webb folgen dann der Beweis der Existenz und der Eindeutigkeit der Lösung. Vgl. ebenda, S. 169-170.

5. Mittlere Zeitdauer eines Turnus und mittlerer Laufzeitgrad aller Maschinen

Die mittlere Anzahl stehender Maschinen während eines Turnus ist

$$(5.76) \qquad \sum_{S=0}^{N} S\, P(S) \binom{N}{S}$$

Zusammen mit (5.73) ergibt sich

$$(5.77) \quad \sum_{S=0}^{N} SP(S) \binom{N}{S} = 0 \cdot P(0) + 1 \cdot \binom{N}{1} (b-1)\, P(0) + 2 \binom{N}{2} (ab-1)$$
$$(b-1)\, P(0) \ldots$$
$$= N \cdot P(0) \cdot F$$

$$\text{mit } F = (b-1) \left[1 + \binom{N-1}{1} (ab-1) + \binom{N-1}{2} (a^2b-1)(ab-1) + \ldots \right]$$

Für P(0) läßt sich aus (5.75) ableiten

$$(5.78) \qquad P_0 = \frac{1}{G}$$

$$\text{mit } G = 1 + (b-1) \left[\binom{N}{1} + \binom{N}{2} (ab-1) + \binom{N}{3} (a^2b-1)(ab-1) + \ldots \right]$$

Für die mittlere Zeitdauer eines Turnus erhält man somit:

$$(5.79) \qquad T = NK + NC \frac{F}{G}$$

Wie Benson und Cox gezeigt haben, erhält man den Bedienungszeitgrad des Arbeiters nach der Formel:[1)]

$$(5.80) \qquad \text{Bedienungszeitgrad} = MNCR$$

Nun gilt aber auch:

$$(5.81) \qquad \text{Bedienungszeitgrad} = \frac{T - NK}{T}$$

---

1) Vgl. BENSON-COX (14), S. 67 f.: Bedienzeitgrad = T_B/T. Laufzeitgrad aller Maschinen $R = T_L/(NT)$. Mittlere Anzahl Reparaturfälle während $T = M\, T_L$. Die mittlere Bedienzeit ist also $M\, T_L\, C$. Somit ergibt sich für den Bedienzeitgrad = $(M\, T_L\, C)/T$ bzw. $M N C R$

(5.79), (5.80) und (5.81) ergeben schließlich:

$$(5.82) \qquad R = \frac{F}{MN(KG + CF)}$$

bzw.

$$(5.83) \qquad T = \frac{NK}{1 - MNCR}$$

Damit sind alle Größen bestimmt, die zur Ermittlung optimaler Bedienungssysteme erforderlich sind.

5212 Ein Zahlenbeispiel

Die obigen Ausführungen lassen erkennen, daß die Werte R und T praktisch nur mit Hilfe größerer Rechenanlagen zu ermitteln sind. Von Herrn Dr. K.M. BRAUER, Berlin, wurde ein Programm aufgestellt, das die Werte R und T für die Größen je einer Parametergruppe, bestehend aus N, K, C und M,berechnet.

In Anlage 1 sind für verschiedene Parameterwerte Laufzeitgrad und Turnusdauer dargestellt.

Der Anlage liegen folgende Zahlenwerte zugrunde: Die Maschinenanzahl N wird parametrisch variiert von N = 2 bis N = 20 in Schrittweiten von N = 2. In gleicher Weise wird die durchschnittliche Anzahl von Maschinenausfällen M parametrisch abgewandelt (M = 2, ..., 20; ΔM = 2) Wegzeit und Bedienzeit sind für alle Fälle konstant.

Datenübersicht:

Anzahl Maschinen N	Wegzeit K Std	Bedienzeit C Std	Anzahl Ausfälle M pro Stunde	Mittlere Laufzeit in Std.
2			2	0,5
4			4	0,25
6			6	0,166
8	0,015	0,05	8	0,125
10	(≙ 0,9 (Min))	(≙ 3 (Min))	10	0,100
12			12	0,083
14			14	0,071
16			16	0,062
18			18	0,055
20			20	0,05

RECHENZENTRUM DER UNIVERSITAET DES SAARLANDES. Anlage: 1

BERECHNUNGEN NACH EINEM MODELL DER WARTESCHLANGENTHEORIE ZUM FALL DES PATROLLING REPAIRMAN MIT KONSTANTER WEGRICHTUNG, WEGZEIT UND REPARATURZEIT.

PROBLEM NR. 2000 DATUM: 15. 11. 1968

NR	N	K	C	M	R	T
1	+2.	+.0150	+.0500	+2.0000	+.3788	+.0564
2	+2.	+.0150	+.0500	+4.0000	+.7748	+.0435
3	+2.	+.0150	+.0500	+6.0000	+.6867	+.0510
4	+2.	+.0150	+.0500	+8.0000	+.6123	+.0580
5	+2.	+.0150	+.0500	+10.0000	+.5494	+.0666
6	+2.	+.0150	+.0500	+12.0000	+.4960	+.0741
7	+2.	+.0150	+.0500	+14.0000	+.4505	+.0812
8	+2.	+.0150	+.0500	+16.0000	+.4115	+.0878
9	+2.	+.0150	+.0500	+18.0000	+.3778	+.0938
10	+2.	+.0150	+.0500	+20.0000	+.3486	+.0991
11	+4.	+.0150	+.0500	+2.0000	+.3345	+.0901
12	+4.	+.0150	+.0500	+4.0000	+.6746	+.1303
13	+4.	+.0150	+.0500	+6.0000	+.5419	+.1715
14	+4.	+.0150	+.0500	+8.0000	+.4412	+.2040
15	+4.	+.0150	+.0500	+10.0000	+.3671	+.2257
16	+4.	+.0150	+.0500	+12.0000	+.3121	+.2390
17	+4.	+.0150	+.0500	+14.0000	+.2704	+.2470
18	+4.	+.0150	+.0500	+16.0000	+.2381	+.2519
19	+4.	+.0150	+.0500	+18.0000	+.2124	+.2549
20	+4.	+.0150	+.0500	+20.0000	+.1916	+.2567

NR	N	K	C	M	R	T
21	+6.	+.0150	+.0500	+2.0000	+.7781	+.1688
22	+6.	+.0150	+.0500	+4.0000	+.5570	+.2714
23	+6.	+.0150	+.0500	+6.0000	+.4069	+.3364
24	+6.	+.0150	+.0500	+8.0000	+.3141	+.3658
25	+6.	+.0150	+.0500	+10.0000	+.2541	+.3786
26	+6.	+.0150	+.0500	+12.0000	+.2129	+.3845
27	+6.	+.0150	+.0500	+14.0000	+.1828	+.3873
28	+6.	+.0150	+.0500	+16.0000	+.1601	+.3887
29	+6.	+.0150	+.0500	+18.0000	+.1424	+.3893
30	+6.	+.0150	+.0500	+20.0000	+.1282	+.3897
31	+8.	+.0150	+.0500	+2.0000	+.7114	+.2785
32	+8.	+.0150	+.0500	+4.0000	+.4525	+.4348
33	+8.	+.0150	+.0500	+6.0000	+.3140	+.4915
34	+8.	+.0150	+.0500	+8.0000	+.2389	+.5098
35	+8.	+.0150	+.0500	+10.0000	+.1919	+.5162
36	+8.	+.0150	+.0500	+12.0000	+.1601	+.5185
37	+8.	+.0150	+.0500	+14.0000	+.1373	+.5194
38	+8.	+.0150	+.0500	+16.0000	+.1202	+.5198
39	+8.	+.0150	+.0500	+18.0000	+.1068	+.5199
40	+8.	+.0150	+.0500	+20.0000	+.0962	+.5200
41	+10.	+.0150	+.0500	+2.0000	+.6399	+.4166
42	+10.	+.0150	+.0500	+4.0000	+.3735	+.5929
43	+10.	+.0150	+.0500	+6.0000	+.2546	+.6350
44	+10.	+.0150	+.0500	+8.0000	+.1919	+.6457
45	+10.	+.0150	+.0500	+10.0000	+.1538	+.6487
46	+10.	+.0150	+.0500	+12.0000	+.1282	+.6496
47	+10.	+.0150	+.0500	+14.0000	+.1099	+.6499
48	+10.	+.0150	+.0500	+16.0000	+.0962	+.6500
49	+10.	+.0150	+.0500	+18.0000	+.0855	+.6500
50	+10.	+.0150	+.0500	+20.0000	+.0769	+.6500

NR	N	K	C	M	R	T
51	+12.	+.0150	+.0500	+2.0000	+.5710	+.5718
52	+12.	+.0150	+.0500	+4.0000	+.3156	+.7422
53	+12.	+.0150	+.0500	+6.0000	+.2130	+.7721
54	+12.	+.0150	+.0500	+8.0000	+.1601	+.7782
55	+12.	+.0150	+.0500	+10.0000	+.1282	+.7796
56	+12.	+.0150	+.0500	+12.0000	+.1068	+.7799
57	+12.	+.0150	+.0500	+14.0000	+.0916	+.7800
58	+12.	+.0150	+.0500	+16.0000	+.0801	+.7800
59	+12.	+.0150	+.0500	+18.0000	+.0712	+.7800
60	+12.	+.0150	+.0500	+20.0000	+.0641	+.7800
61	+14.	+.0150	+.0500	+2.0000	+.5095	+.7323
62	+14.	+.0150	+.0500	+4.0000	+.2724	+.8851
63	+14.	+.0150	+.0500	+6.0000	+.1829	+.9059
64	+14.	+.0150	+.0500	+8.0000	+.1373	+.9093
65	+14.	+.0150	+.0500	+10.0000	+.1099	+.9099
66	+14.	+.0150	+.0500	+12.0000	+.0916	+.9100
67	+14.	+.0150	+.0500	+14.0000	+.0785	+.9100
68	+14.	+.0150	+.0500	+16.0000	+.0687	+.9100
69	+14.	+.0150	+.0500	+18.0000	+.0611	+.9100
70	+14.	+.0150	+.0500	+20.0000	+.0549	+.9100
71	+16.	+.0150	+.0500	+2.0000	+.4568	+.8918
72	+16.	+.0150	+.0500	+4.0000	+.2392	+1.0237
73	+16.	+.0150	+.0500	+6.0000	+.1602	+1.0379
74	+16.	+.0150	+.0500	+8.0000	+.1202	+1.0397
75	+16.	+.0150	+.0500	+10.0000	+.0962	+1.0400
76	+16.	+.0150	+.0500	+12.0000	+.0801	+1.0400
77	+16.	+.0150	+.0500	+14.0000	+.0687	+1.0400
78	+16.	+.0150	+.0500	+16.0000	+.0601	+1.0400
79	+16.	+.0150	+.0500	+18.0000	+.0534	+1.0400
80	+16.	+.0150	+.0500	+20.0000	+.0481	+1.0400

NR	N	K	C	M	R	T
81	+18.	+.0150	+.0500	+2.0000	+.4124	+1.0476
82	+18.	+.0150	+.0500	+4.0000	+.2131	+1.1523
83	+18.	+.0150	+.0500	+6.0000	+.1424	+1.1689
84	+18.	+.0150	+.0500	+8.0000	+.1068	+1.1699
85	+18.	+.0150	+.0500	+10.0000	+.0855	+1.1700
86	+18.	+.0150	+.0500	+12.0000	+.0712	+1.1700
87	+18.	+.0150	+.0500	+14.0000	+.0611	+1.1700
88	+18.	+.0150	+.0500	+16.0000	+.0534	+1.1700
89	+18.	+.0150	+.0500	+18.0000	+.0475	+1.1700
90	+18.	+.0150	+.0500	+20.0000	+.0427	+1.1700
91	+20.	+.0150	+.0500	+2.0000	+.3750	+1.1995
92	+20.	+.0150	+.0500	+4.0000	+.1920	+1.2931
93	+20.	+.0150	+.0500	+6.0000	+.1282	+1.2994
94	+20.	+.0150	+.0500	+8.0000	+.0962	+1.3000
95	+20.	+.0150	+.0500	+10.0000	+.0769	+1.3000
96	+20.	+.0150	+.0500	+12.0000	+.0641	+1.3000
97	+20.	+.0150	+.0500	+14.0000	+.0549	+1.3000
98	+20.	+.0150	+.0500	+16.0000	+.0481	+1.3000
99	+20.	+.0150	+.0500	+18.0000	+.0427	+1.3000
100	+20.	+.0150	+.0500	+20.0000	+.0385	+1.3000

522 Sonstige Modelle der Gruppe II

Das Modell von MACK-MURPHY-WEBB wurde von C. MACK[1] - wie bereits erwähnt - dahingehend erweitert, daß die Prämisse konstanter Bedienungszeiten zugunsten einer allgemeinen Verteilung der Bedienungszeiten aufgegeben wurde. Die Bedingungen, wann Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung gegeben sind, werden aufgezeigt.

Ein weiteres Modell mit Turnusbedienung stammt von O'CONNOR[2], das jedoch theoretisch nicht befriedigen kann, da es dem stochastischen Charakter der Mehrstellenarbeit nur ungenügend Rechnung trägt.

Speziell für Mehrstellenarbeit in der Spinnerei-Industrie existiert ein Modell mit Turnusbedienung von HOWIE und SHENTON[3]. Die wesentlichen Annahmen, die sie treffen, sind die in regelmäßigen Zeitabständen auftretenden Spindelstillstände, die durch zufällige Ausfälle überlagert werden, sowie eine konstante Turnusdauer.

Ausführlich haben BEN-ISRAEL und NAOR[4] die Probleme bei stochastischer Mehrstellenarbeit und Turnusbedienung erörtert.

Sie behandeln eine Vielzahl von Modellen unter verschiedensten Prämissen. Eine wesentliche Grundannahme ist die Prämisse der Unabhängigkeit der Bedienungszeit ("attendance time") vom Zustand (Lauf oder Stillstand) der Maschine. Charakteristische Größen für verschiedene Bedienzeitverteilungen werden abgeleitet[5].

Ein stochastisches Modell mit Turnusbedienung, das mit Hilfe von Simulation gelöst wird, beschreiben CONWAY, MAXWELL und SAMPSON[6]. Bei ihnen findet man ein ALGOL-Programm, das

- die gesamte produzierte Stückzahl
- die mittlere Turnusdauer
- den Wartezeitgrad
- den Brachzeitgrad

berechnet.

---

1) MACK (127), S. 173-178
2) O'CONNOR (148), S. 303-307
3) HOWIE-SHENTON (89), S. 381-395
4) BEN-ISRAEL-NAOR (12), S. 245-269, S. 270-276
5) BEN-ISRAEL und NAOR erwähnen ein Modell von RUNNENBURG (168), S.221. Es war dem Verfasser nicht möglich, diesen Aufsatz zu beschaffen.
6) CONWAY-MAXWELL-SAMPSON (33), S. 105-107

53 Kritik und Erweiterungen

1. Bei der Konstruktion von Modellen ist es unumgänglich, von der Wirklichkeit zu abstrahieren, da nicht alle Einflußgrößen berücksichtigt werden können. Aus diesem Grund kommt es naturgemäß zu Vereinfachungen, die daraufhin zu untersuchen sind, ob sie die Ergebnisse merklich beeinträchtigen oder nicht.

Vernachlässigungen unwesentlicher Einflußgrößen sind in den meisten Fällen vertretbar. Hingegen sind Vereinfachungen, die im Hinblick auf eine einfachere mathematische Behandlung der Modelle vorgenommen werden, mit Vorsicht zu beurteilen. Hierher gehören in erster Linie die Annahmen exponentialverteilter Lauf- und Bedienungszeiten und die Annahme der stochastischen Unabhängigkeit der Ereignisse. Wie BECKER jedoch nachweisen konnte, ist zumindest das Modell G/G/2 durch Ereigniszerlegung exakt lösbar[1].
Wenn auch die Prämisse homogener Arbeitsstellen in der betrieblichen Realität zuweilen erfüllt ist, so ist der Fall ungleichartiger Arbeitsstellen doch wirklichkeitsnäher. Bereits BENSON und COX[2] haben 1951 ein Modell für zwei verschiedene Ankunftsraten aufgestellt und BEN-ISRAEL und NAOR behandeln ein System mit "... constant Poisson break down intensity of i n d i v i d u a l machines ..."[3]
Die Prämisse gleich qualifizierter Arbeitskräfte wiegt unseres Erachtens weniger schwer. Dennoch dürfte es mitunter zweckmäßig sein, auch unterschiedliche Bedienungsraten in ein Modell zu integrieren; der Möglichkeit, daß Arbeiter verschiedener Leistungsfähigkeit in einer Gruppe zusammengefaßt wurden, wäre damit entsprochen. Modelle dieser Art sind uns nicht bekannt.

Als wesentlicher Kritikpunkt erscheint uns die Tatsache,daß in den meisten Modellen nur Bedienungszeiten bei nicht produzierendem Betriebsmittel berücksichtigt werden. Wenn diese Zeiten in vielen Betrieben auch den Hauptteil der Tätigkeitszeit des Arbeiters ausmachen, so führt die generelle Vernachlässigung anderer Tätigkeitszeiten (Wegzeit, Überwachungszeit, Verrichtungszeit bei produzierendem Betriebsmittel) doch teilweise zu erheblichen Fehlern bei der Ermittlung des Tätigkeitszeitgrades. Erweiterungen der bestehenden Modelle in

1) Vgl. BECKER (9).
2) BENSON-COX (14), S. 65-82
3) BEN-ISRAEL - NAOR (12), S. 245

dieser Hinsicht stammen von BENSON[1], BENSON-MILLER-TOWNSEND[2] und COX und SMITH[3]. BENSON teilt die Tätigkeiten des Arbeiters in "productive and ancillary duties" ein. "Productive duties are those which are concerned with re-starting machines in the shortest possible time after they have stopped. Ancillary duties are any other duties which, although they may be necessary for the efficient running of the machines, can be done without the machines being stopped."[4] Als Beispiele für "ancillary duties" werden angeführt: Überwachungszeiten, Maschinen mit Material beschicken, fertige Produkte den Maschinen entnehmen, aber auch Erholungszeiten und Zeiten für sonstige persönliche Bedürfnisse. Eine Klassifikation der "ancillary work" geben COX und SMITH.

Eine wesentliche Erweiterung bedeutet die Berücksichtigung von Prioritäten, also die bevorzugte Bedienung bestimmter Maschinen bei gleichzeitigem Stillstand u. dgl.[5] Modelle mit Prioritäten stammen von AVI-ITZHAK und NAOR[6], JAISWAL und THIRUVENGADAM[7], FERSCHL[8] und PHIPPS[9]. Allerdings ist das Modell von PHIPPS kein geschlossenes System.

BEN-ISRAEL und NAOR[10] behandeln schließlich noch ein Modell, in dem die Maschinen von einem "outside controller" überwacht werden, um Maschinenstillstände frühzeitig zu erkennen. In der betrieblichen Praxis ist es nämlich zuweilen unvermeidbar, daß der Arbeiter Stillstände - aus welchen Gründen auch immer - nicht bemerkt. So kann es zu gleichzeitigem Auftreten von Brach- und Wartezeiten kommen, das durch den Einsatz eines Kontrolleurs vermieden wird.

2. LEHMANN hat die Anwendbarkeit geschlossener Wartesysteme bei Mehrstellenarbeit untersucht und kommt dabei zu positiven Ergebnissen[11]. Im Mittelpunkt dieser Arbeit steht die Überprüfung theoretisch angenommener Lauf- und Bedienzeitverteilungen durch empirische Messungen.

---

1) BENSON (15), S. 200-210
2) BENSON-MILLER-TOWNSEND (16), S. T 619-T 644
3) COX-SMITH (35), S. 102-106
4) BENSON (15), S. 200
5) Vgl. hierzu S. 113 und S. 114 dieser Arbeit.
6) AVI-ITZHAK-NAOR (7), S. 664-672
7) JAISWAL-THIRUVENGADAM (90), S. 624-636
8) FERSCHL (51), S. 106-109
9) PHIPPS (159), S. 76-86
10) BEN-ISRAEL-NAOR (12), S. 247 f.
11) LEHMANN (121)

Als Ergebnis erhält LEHMANN: "Die Laufzeiten der Betriebsmittel sind zwar nicht immer statistisch gesichert als Exponentialverteilung anzuerkennen, doch entspricht ihre gesamte Anlage durchaus einem exponentiellen Verlauf."[1] Für die Bedienzeiten zeigt LEHMANN, daß sich diese gut durch eine Gammaverteilung beschreiben lassen. LEHMANN bestätigt unsere Vermutung, daß der Einfluß der Bedienzeitverteilung auf den Nutzungszeitgrad nicht sehr groß ist. "Die Untersuchungen der Maschinenausnutzung auf ihre Abhängigkeit von der Form der Bedienungszeitverteilung bestätigt die bislang unbewiesene Behauptung, der Verlauf der Bedienungszeitverteilung wirke sich nicht wesentlich auf die Ergebnisse der Modelle aus."[2] Die Untersuchungen LEHMANNS zeigen, "... daß das einfache, leicht erfaßbare Modell mit exponentialverteilten Laufzeiten und Bedienungszeiten durchaus für Mehrstellenarbeit anwendbar ist..."[3]
Schließlich sei noch auf die Dissertation von GIESEN[4] hingewiesen, der die Anwendbarkeit der Simulationstechnik auf die Ermittlung optimaler Fertigungsbedingungen bei Mehrstellenarbeit untersucht hat. Diese Untersuchung erscheint uns insofern berechtigt und wertvoll zu sein, als es in der Praxis eine Fülle unterschiedlicher Formen stochastischer Mehrstellenarbeit gibt, die durch die vorhandene Modelle unseres Erachtens bestenfalls approximativ beschrieben werden. Selbst dann, wenn ein Modell zur Beschreibung dieser komplizierten Formen gefunden werden kann, ist die mathematisch-analytische Untersuchung meist sehr schwierig. Hier bieten sich nun die Verfahren der Simulation zur (numerischen) Lösung dieser Probleme an. Insbesondere können empirisch ermittelte Verteilungen simuliert werden.

Von FROTSCHER stammt ein Simulationsmodell für stochastische Mehrstellenarbeit, das im Aufbau dem von uns im Kapitel 43 dargestellten allgemeinen Modell für deterministische Mehrstellenarbeit ähnlich ist[5]. In dem von FROTSCHER dargestellten Modell wird in jedem Arbeitstakt Bedienzeit und Laufzeit simuliert.

---

1) LEHMANN (121), S. 111
2) ebenda, S. 112
3) ebenda, S. 114
4) GIESEN (71)
5) FROTSCHER (63), S. 125-169

Ein Nachteil der Simulationstechnik besteht darin, daß man keine allgemeinen Formeln für die charakteristischen Größen eines Wartesystems erhält, sondern nur numerische Lösungen. Doch ist man gerade an letzteren interessiert, wenn es darum geht, optimale Bedienungssysteme für eine konkrete betriebliche Situation zu finden.

6 Abkürzungsverzeichnis

Ann. Math. Stat.	Annals of Mathematical Statistics
Fact. Mgmt.	Factory Management and Maintenance
J. Ind. Eng.	The Journal of Industrial Engineering
J. R. Stat. Soc. B.	Journal of the Royal Statistical Society, Series B
JORSA	The Journal of the Operations Research Society of America
J. Text. Inst.	Journal of Textile Institute
Rev. Fr. Rech. Op.	Revue Francaise de Recherche Opérationelle
ZfB	Zeitschrift für Betriebswirtschaft
ZfbF	Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung
ZfhF	Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung
Zentralblatt f. Arb. wiss.u.soz.Betr.prax.	Zentralblatt für Arbeitswissenschaft und soziale Betriebspraxis

7 LITERATURVERZEICHNIS

(1) ALBERS, H.: Die optimale Stellenzahl bei der Mehrmaschinenbedienung in der Wirk- und Strickindustrie. o.O.o.J., Diss., Darmstadt 1959

(2) ANSON, C.F.: Determining Machine and Operator Utilization on Synchronization Allowances. Time and Motion Study, 5 (1956), S. 15-39

(3) derselbe: Determining the Number of Machines to be Attented by an Operator in Order to Minimize the Total Cost per Unit of Production. Time and Motion Study, 6(1957), S. 13-27

(4) derselbe: Theory of Machine Interference. Losses on Hopper Fed Machinery. Time and Motion Study, 6 (1957), S. 30-41

(5) ASHCROFT, H.: The Productivity of Several Machines Under the Care of One Operator. J.R. Stat. Soc. B, 12(1950), S. 145-151

(6) AUTORENKOLLEKTIV: (T.Findeisen u.a.) Arbeitsnormung bei Mehrarbeitsstellenbedienung. Beiträge zu Fragen der Textilindustrie, Heft 17. Hrsg.: Institut für Ökonomie der Textilindustrie der Technischen Universität Dresden. Leipzig 1965

(7) AVI-ITZHAK, B., NAOR, P.: On a Problem of Preemptive Priority Queuing. JORSA, 9(1961), S. 664-672

(8) BECKER, N.: Diskussion eines einfachen geschlossenen Warteschlangenmodells mit Poisson-Prozeß als In- und Output-Prozeß. Zulassungsarbeit zur wissenschaftlichen Prüfung für das Lehramt an Realschulen. Saarbrücken 1966

(9) BECKER, N.: Ein verallgemeinertes geschlossenes Warteschlangenmodell. Diplomarbeit, Mathematisches Institut der Universität des Saarlandes (Prof. Dr. H. Söhngen) SS 1967, Saarbrücken 1967 (hektographiert)

(10) BECKMANN,M.J.: Lineare Planungsrechnung. Ludwigshafen 1959

(11) BEDORF, H.: Betriebswirtschaftliche Bedeutung von Arbeits- und Zeitstudien. ZfhF, NF 6(1954), S. 172-188

(12) BEN-ISRAEL, A., NAOR, P.: A Problem of Delayed Service I. J. R. Stat.Soc.B, 22(1960), S. 245-269

(13) dieselben: A Problem of Delayed Service II. J. R. Stat.Soc.B, 22(1960), S. 270-276

(14) BENSON, F., COX, D.R.: The Productivity of Machines Requiring Attention at Random Intervals. J.R. Stat. Soc. B, 13(1951), S. 65-82

(15) BENSON, F.: Further Notes on the Productivity of Machines Requiring Attention at Random Intervals. J. R. Stat. Soc. B, 14(1952), S. 200-210

(16) BENSON, F., MILLER, J., TOWNSEND, M.W.H.: Machine Interference: A Solution of Some Work Load Problems Arising When an Operator has Charge of More Than One Machine. J.Text.Inst., 44(1953), S.T 619- T 644

(17) BENSON, F.: Probability and Operations Research. Research, 9(1956), S. 329-334

(18) BENSON, F., GREGORY, G.: Closed Queuing System: A Generalisation of the Machine Interference Model. J. R. Stat. Soc. B, 23(1961), S. 385-393

(19) BERNSTEIN, P.: How Many Automatics Should a Man Run? Fact. Mgmt., 99(1941), Heft 3, S. 85, 156, 158, 160, 162, 164

(20) BHARUCHA-REID, A.T.: Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications. New York - Toronto - London 1960

(21) BHATIA, A.: Basic Structure of Queuing Problems. J. Ind. Eng., 14(1963), S. 13-17

(22) BIHLER, H.: Die Arbeits- und Zeitstudie in der Wirkerei- und Strickerei-Industrie. Textil-Betriebsbücher, Bd. 12, Hrsg. W. Frenzel, Stuttgart 1950

(23) BLOM, G.: Some Contributions to the Theory of Machine Interference. Biometrika, 50(1963), S. 135-142

(24) BÖHM, H.H.: Dynamische Kostensenkung im Betrieb. München 1960

(25) BÖHRS, H.: Verfahrensausgleich in der Akkord- und Prämienentlohnung bei unbeeinflußbaren Zeiten. Arbeitskundliche Mitteilungen für den chemischen Betrieb, Folge 8(1958), S. 1-11

(26) derselbe: Nochmals zum Thema: Verfahrensausgleich in der Akkord- und Prämienentlohnung bei unbeeinflußbaren Zeiten. Arbeitskundliche Mitteilungen für den chemischen Betrieb, Folge 10(1959), S. 11-14

(27) derselbe: Leistungslohn. Wiesbaden 1959

(28) derselbe: Arbeitsstudien in der Betriebswirtschaft. Wiesbaden 1967

(29) BRIGHAM, G.: On a Congestion Problem in an Aircraft Factory. JORSA, 3(1955), S. 412-428

(30) BRUNNSCHWEILER, D.: Machine Interference. J. Text. Inst., 45 (1954), S. T 886-895

(31) BUHR, W.: Dualvariable, Opportunitätskosten und optimale Geltungszahl. ZfB, 37(1967), S. 687-708

(32) CHURCHMAN, C.W., ACKOFF, R.L., ARNOFF, E.L.: Operations Research. Eine Einführung in die Unternehmensforschung. Übers. E. Schlecht und F. Ferschl. Wien - München 1961

(33) CONWAY, R.W., MAXWELL, W.L., SAMPSON, M.: On the Cyclic Servicing of Semiautomatic Machines. J. Ind. Eng., 13(1962), S. 105-107

(34) COX, D.R.: A Table for Predicting the Production from a Group of Machines under the Care of One Operator. J. R. Stat. Soc. B, 16(1954), S. 285-287

(35) COX, D.R., SMITH, W.L.: Queues. London - New York 1961

(36) CRAMER, H.: The Elements of Probability Theory and Some of its Applications. Third Printing. New York - Stockholm 1956

(37) DAMS, W.: Mehrmaschinenbedienung in Maschinenbaubetrieben. Berlin 1958

(38) DANTZIG, G.B.: Lineare Programmierung und Erweiterungen. Übers. A. Jaeger. Berlin - Heidelberg - New York 1966

(39) DARU, E.: Nombre de machines automatiques à confier à un ouvrier en vue d'atteindre le prix de revient minimum. Revue de statistique appliquée, (3) 1955, S. 103-108

(40) derselbe: Un problème de file d'attente. Rev. Fr. Rech. Op., 5(1962), S. 301-312

(41) DENHOLM, D.H.: How Many Machines per Operator? Fact. Mgmt., 112(1954), Heft 7, S. 107, 108, 109, 132

(42) DIRKS, H.: Anforderungsschwerpunkte und Anlernung bei Mehrstellenarbeit. Forfa-Briefe, 2 (1953), Heft 5, S. C/21 - C/29

(43) DOIG, A.: A Bibliography on the Theory of Queues. Biometrika, 44(1957), S. 490-514

(44) EDDISON, R.T., PENNYCUICK, K., RIVETT, B.H.P.: Operational Research in Management. London 1962

(45) EILON, S.: Tafeln und Tabellen für Wirtschaft und Industrie. (Industrial Engineering Tables). Übers. G. Kirschmer, H.J. Prieur. München - Wien 1964

(46) ELCE, I., LIEBECK, H.: Expected Production of a Single Repairman Machine-Maintenance System with Overnight Repairs. JORSA, 14(1966), S. 478-485

(47) FABRYCKY, W.J., TORGERSEN, P.E.: Operations Economy. Industrial Applications of Operations Research. Englewood Cliffs (N.J.) 1966

(48) FAURE, R., BOSS, J.P., LE GARFF, A.: Grundkurs der Unternehmensforschung für Studierende und Praktiker. München - Wien 1962

(49) FELLER, W.: An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Vol. I, 2. Aufl., 8. Nachdruck, New York - London 1964

(50) FERNER, W.: Modelle zur Programmplanung im Absatzbereich industrieller Betriebe. Köln - Berlin - Bonn - München 1966

(51) FERSCHL, F.: Zufallsabhängige Wirtschaftsprozesse. Wien - Würzburg 1964

(52) derselbe: Auswahlordnungen und die Wirksamkeit von Wartesystemen. Unternehmensforschung 8(1964), S. 149-160

(53) FETTER, R.B.: The Assignment of Operations to Service Automatic Machines. J. Ind. Eng., 6(1955), S. 22-30

(54) FIELD, J.W.: Machine Utilization and Economical Assignment. Fact. Mgmt., 104(1946), Heft 8, S. 228-296

(55) FISZ, M.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. 3. Aufl., Berlin 1965

(56) FLETCHER, A., CLARKE, G.: Mathematische Hilfsmittel der Unternehmensführung. München 1966

(57) FLOOD, M.M.: The Traveling-Salesman Problem. JORSA, 4(1956), S. 61-75

(58) Förstner, K.: Über das Auftreten und die Berechnung von Warteschlangen. In: Operations Research, Verfahren I. Hrsg. R. Henn Meisenheim/a. Gl. 1963

(59) FONZI, F.: Beitrag zur Anwendung mathematischer Methoden für eine wirtschaftlichere Gestaltung der Fertigung. Köln - Opladen 1964

(60) FRACKENPOHL, H.: Probleme der Begutachtung der Wirtschaftlichkeit in Seidenwebereien mit Hilfe der Normalkostenrechnung. o.O.o.J., Diss. Köln 1950

(61) FRANZ, F.: How to Figure how Many Machines per Operator. Fact. Mgmt., 102(1944), Heft 3, S. 108-110

(62) FRENZ, W., THURMANN, W.H.: Der Einfluß mehrstelliger Gruppenarbeit auf die Erzeugniskosten. Refa-Nachrichten, 11(1958), Heft 5, S. 140-142

(63) FROTSCHER, J.: Ein Simulationsmodell für den Reparaturdienst. In: Simulationsmodelle für ökonomisch-organisatorische Probleme. Schriftenreihe Datenverarbeitung. Institut für Datenverarbeitung, Dresden. Köln - Opladen 1968, S. 125-169

(64) FRY, T.C.: Probability and Its Engineering Uses. 13. Nachdruck, New York u.a. o.J. (1. Aufl, 1928)

(65) GALLIHER, H.P.: Queueing. In: Notes on Operations Research 1959, MIT, Cambridge (Ma.), 1959

(66) GAUTZSCH, O.: Verlustzeiten und Entlohnung bei Mehrmaschinenbedienung. Maschinenbau/Der Betrieb, 15(1936), Heft 7/8, S. 179-182

(67) derselbe: Durchführung von Zeitaufnahmen bei Mehrmaschinenbedienung. Werkstattechnik und Werkleiter, 31(1937), Heft 8, S. 173-176

(68) GELLERT, O.: Die Behandlung der Mehrmaschinenbedienung in der betrieblichen Kostenrechnung. Technische Rundschau, 47(1955), Heft 1,S.15

(69) GIERSCH, H.: Allgemeine Wirtschaftspolitik, 1. Bd. Grundlagen. In: Die Wirtschaftswissenschaften, Reihe B, Beitrag Nr. 9, Hrsg.: E. Gutenberg, Wiesbaden 1960

(70) GIESEN, F.: Die Erforschung der Mehrstellenarbeit im Spiegel der Fachliteratur. Industrielle Organisation, 35(1966), S. 421-436

(71) derselbe: Untersuchungen über die Anwendbarkeit der Simulationstechnik auf die Ermittlung optimaler Fertigungsbedingungen bei Mehrstellenarbeit. Diss. ETH Zürich, 1966 (Aachen 1966)

(72) GIRAULT, M.: Initiation aux processus aléatoires. Le processus de Poisson - Files d'attente - Pannes de Machines. Paris 1957

(73) GNEDENKO, B.W.: Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. 4. Aufl., Berlin 1965

(74) GOEBEL, H.: Die Mehrmaschinenbedienung als wirkungsvolle Methode zum Einsatz von Sondermaschinen auch bei mittleren Stückzahlen. Werkstatt und Betrieb, 89 (1956), Heft 5, S. 233-236

(75) GRAF, U., HENNING, H.J.: Statistische Methoden bei textilen Untersuchungen. Berichtigter Neudruck, Berlin - Göttingen - Heidelberg 1955

(76) GROSS, M.: Leistungsvorrechnung bei Mehrmaschinenbedienung. Textil-Praxis, 4(1949), S. 113-116

(77) GUTENBERG, E.: Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre. 1. Bd.: Die Produktion. 14. Aufl., Berlin - Heidelberg - New York 1968

(78) derselbe: Einführung in die Betriebswirtschaftslehre. In: Die Wirtschaftswissenschaften, Reihe A, Beitrag Nr. 1, Hrsg.: E. Gutenberg, Wiesbaden 1958

(79) HAASE, K.: Mehrmaschinenbedienung, Zusammenfassung der geeigneten Werkstücke und Ermittlung der Vorgabezeiten. Werkstatt und Betrieb, 73 (1940), Heft 9, S. 185-188

(80) HALD, A.: Statistical Theory with Engineering Applications. 2. Aufl., New York - London 1955

(81) HALTY, M.: Incentive Wage Practice for Restricted Work. J. Ind. Eng., 10(1959), S. 457-460

(82) HAX, H.: Die Koordination von Entscheidungen. Köln - Berlin - Bonn - München 1965

(83) derselbe: Kostenbewertung mit Hilfe der mathematischen Programmierung. ZfB, 35(1965), S. 197-210

(84) HEINZ, K.: Zu Palms Warteschlangenmodell für Mehrmaschinenbedienung. Ablauf und Planungsforschung 7(1966), Heft 4, S. 205-213

(85) HENN, R.: Wirtschaftliche Anwendungsmöglichkeiten stochastischer Prozesse. Industrielle Organisation, 31(1962), S. 43-48

(86) HENON, R.: Combien de machines peut-on confier à un seul agent? Revue de statistique appliquée, 3(1955), S. 73-81

(87) HERTLEIN, A.: Zur Problematik der Wirtschaftlichkeit. In: Fragen der Technik in Einzeldarstellungen. Hrsg.: F. Westrich, München 1949, S. 357-375

(88) HOHN, P.: Beiträge zur Theorie der Wartesysteme. o.O.o.J., Diss. Göttingen 1966

(89) HOWIE, A.J., SHENTON, L.R.: The Efficiency of Automatic Winding Machines with Constant Patrolling Time. J.R. Stat. Soc. B, 21(1959), S. 381-395

(90) JAISWAL, N.K., THIRUVENGADAM, K.: Simple Machine Interference with two Types of Failure. JORSA, 11(1963), S. 624-636

(91) JANKE, R.: Organisation der Mehrmaschinenbedienung. Berlin 1963

(92) JONES, W.D.: A Simple Way to Figure Machine Downtime. Fact.Mgmt., 104(1946), Heft 10, S. 118-121

(93) derselbe: Machine Interference. J. Ind. Eng., 1 (1949), S. 10, 11, 19

(94) derselbe: Über die Ermittlung der Maschinenstillstandsüberlappung. Textil-Praxis, 9(1954), S. 167-172

(95) JONES, P.B.: Four Machines Running Instead of Three. Fact. Mgmt., 109(1951), Heft 10, S. 123-124

(96) KAESEWURM, F.: Mehrstellenarbeit an Werkzeugmaschinen. REFA-Nachrichten, 3(1950), Heft 2, S. 43-47

(97) KÄSTNER, P.: Wieviel automatische Maschinen soll ein Arbeiter bedienen? Maschinenbau/Der Betrieb, 6(1927), Heft 13, S. 662-664

(98) KAUFMANN, A., CRUON, R.: Les phénomènes d'attente. Paris 1961

(99) KENDALL, D.G.: Some Problems in the Theory of Queues. J. R. Stat. Soc. B, 13(1951), S. 151-185

(100) derselbe: Stochastic Processes Occuring in the Theory of Queues and Their Analysis by the Method of the Imbedded Markov Chain. Ann.Math. Stat., 24(1953), S. 338-354

(101) KHINTCHINE, J.A.: Über die mittlere Dauer des Stillstandes von Maschinen (russisch). Matematicesci Sbornik, 40(1933), S. 119-123

(102) KILGER, W.: Produktions- und Kostentheorie. In: Die Wirtschaftswissenschaften, Reihe A, Beitrag Nr. 13, Hrsg.: E. Gutenberg, Wiesbaden 1958

(103) derselbe: Kurzfristige Erfolgsrechnung. In: Die Wirtschaftswissenschaften, Reihe A, Beitrag Nr. 36, Hrsg.: E. Gutenberg, Wiesbaden 1962

(104) derselbe: Flexible Plankostenrechnung. Theorie und Praxis der Grenzplankostenrechnung und Deckungsbeitragsrechnung. 3. erw. Aufl., Köln-Opladen 1967

(105) derselbe: Optimale Verfahrenswahl bei gegebenen Kapazitäten. In: Produktionstheorie und Produktionsplanung. Festschrift für K. Hax. Hrsg.: A. Moxter u.a., Köln und Opladen 1966, S. 156 - 191

(106) KLEINMANN, H.A.: Simultaneous Determination of the Operating Time of 450 Machines. Revue de statistique appliquée, 3(1955), S. 11-22

(107) KNÖDEL, W.: Mehrplatzarbeit. Unternehmensforschung, 1(1956), S. 15-17

(108) KOCH, H.: Das Wirtschaftlichkeitsprinzip als betriebswirtschaftliche Maxime. ZfhF, NF 3(1951), S. 160-170

(109) KÖB, H.: Mehrstellenbedienung und Gemeinschaftsbenutzung. Textil-Praxis, 11(1956), S. 675-684

(110) KOHLMANN, H.: Akkord und unbeeinflußbare Zeiten. REFA-Nachrichten, 14(1961), Heft 5, S. 165-169

(111) KOOPMANS, T.C.: Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities. In: Activity Analysis of Production and Allocation. Hrsg.: T.C. Koopmans. New York - London 1951

(112) KOSIOL, E.: Modellanalyse als Grundlage unternehmerischer Entscheidungen. ZfhF, NF 13(1961), S. 318-334

(113) KRELLE, W., KÜNZI, H.P.: Lineare Programmierung. Zürich 1958

(114) KREYSZIG, E.: Statistische Methoden und ihre Anwendungen. Göttingen 1965

(115) KROMPHARDT, W., HENN, R., FÖRSTNER, K.: Lineare Entscheidungsmodelle. Berlin - Göttingen - Heidelberg 1962

(116) KRONIG, R.: On Time Losses in Machinery Undergoing Interruptions. Physica, 10(1943), S. 215-224

(117) KRONIG, R., MONDRIA, H.: On Time Losses in Machinery Undergoing Interruptions. Physica, 10(1943), S. 331-336

(118) LANGHEINRICH, G.: Das Zeitproblem bei der Mehrmaschinenbedienung. Zentralblatt f.Arb.wiss.u.soz. Betr.prax., 2(1948), S. 27-31

(119) LEDERER-TRATTNERN, H.v: Mehrmaschinen-Arbeit. Zentralblatt f.Arb. wiss.u.soz.Betr.prax., 10(1956), S. 185-189

(120) LE GALL, P.: Les systèmes avec ou sans attente et les processus stochastiques. Tom. 1. Paris 1962

(121) LEHMANN, S.: Anwendbarkeit abgeschlossener Warteschlangenmodelle bei Mehrstellenarbeit. o.O.o.J., Diss. Aaachen 1966

(122) derselbe: Beitrag zur Anwendung der Warteschlangentheorie bei Mehrstellenarbeit für eine optimale Produktions- und Fertigungsplanung in Industriebetrieben. Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen. Nr. 1961. Köln - Opladen 1968.

(123) LEWANDOWSKI, R.: Zur Theorie der Warteschlangen. Teil I, Teil II, Teil II. Elektronische Datenverarbeitung 8(1966), S. 149-160, 208-218, 251-263

(124) LOOS, W.: Erfahrungen mit der Mehrstellenarbeit in der Textilindustrie. In: Arbeits- und betriebskundliche Reihe, Hrsg. Bundesvorstand des deutschen Gewerkschaftsbundes, Heft 3, Köln 1965, S. 24-40

(125) LUNGER, G.F.: Bibliography on Queueing Theory. Sperry Rand Corporation, Univac Division 1959

(126) MACK, C., MURPHY, T., WEBB, N.L.: The Efficiency of N Machines Uni - Directionally Patrolled by One Operator When Walking Times and Repair Times are Constant. J.R.Stat.Soc.B, 19(1957), S. 166-172

(127) MACK, C.: The Efficiency of N Machines Uni - Directionally Patrolled by One Operative When Walking Time is Constant and Repair Times Are Variable. J.R.Stat. Soc.B, 19(1957, S. 173-178

(128) MANGELSDORF, T.A.: Application of Waiting-Line Theory to Manufacturing Problems. In: Analysis of Industrial Operations. Hrsg.: E.H. Bowman, R.B. Fetter, Homewood (Ill.) 1959, S. 257-294

(129) MARSHALL, A.: Principles of Economics. 8. Aufl., London 1964

(130) MATHIEU, J., LEHMANN, S.: Eigenarten der industriellen Mehrstellenarbeit. Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen Nr. 1180, Köln - Opladen 1963

(131) MAUCHER, H.: Gedanken zur Prämienentlohnung. Der Arbeitgeber, 14(1962), Heft 1/2, S. 36

(132) MAYNARD, H.B.: (Hrsg.) Handbuch des Industrial Engineering. Gestaltung, Planung und Steuerung industrieller Arbeit, Teil I-III, Berlin - Köln - Frankfurt/M. o.J.

(133) derselbe: Handbuch des Industrial Engineering. Gestaltung, Planung und Steuerung industrieller Arbeit, Teil IV-VI, Berlin - Köln - Frankfurt/M. o.J.

(134) MEID, R.: Planung und Zeitberechnung bei Mehrmaschinenbedienung. Wirtschaftlichkeit, 7 (1954), Heft 5/6, S. 97-101

(135) MEINING, K.: Analytisches Verfahren zur Ermittlung der Anzahl zu bedienender Maschinen bei vollautomatischen Drehbänken. Werkstatt und Betrieb, 88(1955), Heft 11, S. 713-717

(136) MENGES, G.: Grundriß der Statistik. Teil 1: Theorie. Köln und Opladen 1968

(137) METZGER, W.: Beitrag zum Problem der Mehrstellenbedienung, speziell in der Kreuzspulerei. Textil-Praxis, 11(1956), S. 1204

(138) MICHEL, H.: Grenzkosten und Opportunitätskosten. ZfbF, NF 16(1964), S. 82-93

(139) MOLINA, E.C.: Poisson's Exponential Binomial Limit. Princeton (N.J.) 1942. (New York 1947)

(140) MORSE, P.M.: Queues, Inventories and Maintenance. Publications in Operations Research. Vol. 1, New York 1958

(141) MULLER, H.L.: Wachtijden problem bij bedienind van een groep machines. Doctoral Thesis, Delft 1951

(142)	NAOR, P.:	On Machine Interference. J.R.Stat.Soc.B, 18(1956), S. 280-287
(143)	derselbe:	Normal Approximation to Machine Interference with Many Repairmen. J.R.Stat.Soc. B. 19(1957), S. 334-341
(144)	derselbe:	Some Problems of Machine Interference. Proceedings of the First International Conference on Operational Research, JORSA, Baltimore 1957, S. 147-165
(145)	NASR, S.K.:	On Some Problems of Machine Interference. J.R.Stat.Soc.B, 21(1959), S. 106-113
(146)	NEUMANN, R.:	Der mehraggregatische Arbeitsplatz des Webers. Textil-Praxis, 2(1947), S. 267-270
(147)	derselbe:	Die optimale Spindelzahl für eine Person. Textil-Praxis, 9(1954), S. 1131-1132
(148)	O'CONNOR, T.F.:	Cyclic Servicing. J. Ind. Eng., 10(1959), S. 303-307
(149)	OPL, E.:	Mehrmaschinenbedienung. Wirtschaftlichkeit, 3(1950), Heft 3, S. 25-28
(150)	OTT, A.:	Marktform und Verhaltensweise, Stuttgart 1959
(151)	o.V.	Berechnung bzw. Ermittlung der Überlappungszeiten bei Mehrmaschinenbedienung. Textil-Praxis, 10(1955), S. 561-562
(152)	o.V.	Rechnen mit Maschinenstundensätzen 2. erw. und überarb. Aufl., Frankfurt a.M. 1965 (Verein Deutscher Maschinenbau-Anstalten e.V., Betriebswirtschaftsblatt 7)
(153)	PALM, C.:	Arbetskraften fördelning vid betjäning av automat maskiner. Industritideningen Norden 75(1947), S. 75-80, 90-94, 119-123
(154)	derselbe:	The Assignment of Workers in Servicing Automatic Machines. J. Ind. Eng., 9 (1958) S. 28-42
(155)	derselbe:	Der Einsatz der Arbeitskräfte bei Mehrmaschinenbedienung. Ablauf- und Planungsforschung, 6(1965), S. 281-305
(156)	PARZEN, E.:	Stochastic Processes. 2. Aufl., San Franzisco 1964
(157)	PEARSON, E.S., HARTLEY, H.O.:	Biometrika Tables for Statisticians, Vol.I 2. Aufl. (reprinted) Cambridge 1962

(158) PECK, L.G., HAZELWOOD, R.N.: Finite Queuing Tables - Publications in Operations Research - Vol. 2, New York 1958

(159) PHIPPS, T.E.: Machine Repair as a Priority Waiting Line Problem. JORSA, 4(1956), S. 76-86

(160) PLITT, K.: Das Arbeitsschaubild als Grundlage der Arbeitsgestaltung. REFA-Nachrichten, 8 (1956), Heft 4, S. 128

(161) PRACHTL, G.: Praktische Anwendung der Theorie über die Mehrplatzarbeit. Rationalisierung, 3(1952) Heft 10, S. 261

(162) RELLIGMANN, H.: Arbeitsverteilung an Fertigungsstellen, Maschinenbelegung und Arbeitskräfteplanung sowie -steuerung. Textil-Praxis, 12 (1957), S. 691

(163) RIES, J.: Die Mehrstellenarbeit. Abhandlungen aus dem Industrieseminar der Universität zu Köln, Heft 9, Berlin 1959

(164) RILEY, V.: Bibliography on Queueing Theory. In: McCloskey, I.F., Cloppinger, J.M., Operations Research for Management II Baltimore 1956

(165) RIORDAN, J.: Stochastic Service Systems, New York 1962

(166) RUIZ-PALA, F. TOLRA, J.: Discussion of a Number of Machine Tools under the Supervision of a Single Operator, the Servicing Time Following the Erlang Type. Proc. 6th. Intern. Meet. Inst. Management Sci., Paris, September 11-17, 1959, 2, S. 315, 1961

(167) RUMMEL, K.: Einheitliche Kostenrechnung auf der Grundlage einer vorausgesetzten Proportionalität der Kosten zu betrieblichen Größen. Nachdruck der 3. Aufl., Düsseldorf 1967

(168) RUNNENBURG, I.T.: Machines Served by a Patrolling Repairman, Math. Center Amsterdam, Rep. S. 221, 1957 (zitiert nach Mack - Murphy - Webb)

(169) SASIENI, M., YASPAN, A., FRIEDMANN, L.: Methoden und Probleme der Unternehmensforschung, Operations Research. Würzburg 1962

(170) SAATY, T.L.: Résumé of Usefull Formulas in Queuing Theory. JORSA, 5(1957), S. 161-200

(171) derselbe: Mathematical Methods of Operations Research. New York - Toronto - London 1959

(172) derselbe: Elements of Queuing Theory with Applications. New York - Toronto - London 1961

(173) SASSMANNSHAUSEN, W.: Die Ermittlung der Vorgabezeit in der Winderei und Spulerei unter besonderer Berücksichtigung der Wegzeit und der Überlappung. Textil-Praxis, 9(1954), S. 1156-1160

(174) derselbe: Die Berücksichtigung von Wegzeiten und Überlappungen bei der Ermittlung von Vorgabezeiten und Stellenzahlen. Zeitschrift für die gesamte Textilindustrie, 56(1954), S. 1220, S. 1378

(175) SCHEIB, J.C.: Incentive Wage Practice for Restricted Work. J. Ind. Eng., 8(1957), S. 150-156

(176) SCHLAIFER, R.: Probability and Statistics for Business Decisions. New York - Toronto - London 1959

(177) SCHNEEWEISS, H.: Zur Theorie der Warteschlangen. ZfhF, NF 12(1960), S. 471-507

(178) SCHNEIDER, E.: Einführung in die Wirtschaftstheorie. II. Teil, Wirtschaftspläne und wirtschaftliches Gleichgewicht in der Verkehrswirtschaft. 6. verb. Aufl., Tübingen 1960

(179) SCHÖNEFELD, H.: Beitrag zu den Grundsatzfragen der Leistungsentlohnung vorzugsweise bei mechanisierter und teilweise automatisierter Fertigung. Köln und Opladen 1965

(180) SEIB, K.: Die Mehrmaschinenbedienung als wirkungsvolle Methode zum Einsatz von Sondermaschinen auch bei mittleren Stückzahlen. Werkstatt und Betrieb, 90(1957), Heft 3, S. 183-185

(181) SÖHNGEN, H.: Theorie der Warteschlangen. o.O.u.J. (Vorlesung am Mathematischen Institut der Universität des Saarlandes, WS 1963. Ausarbeitung von W. Hardeck) hektographiert.

(182) STACKELBERG, H.v.: Grundlagen einer reinen Kostentheorie. Wien 1932

(183) STORM, R.: Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik und statistische Qualitätskontrolle. Leipzig 1965

(184) TAKACS, L.: On a Stochastic Process Concerning Some Waiting Time Problems. Theoretisca Veroyatnosta i Primenen, 2(1957), S. 92-105

(185) derselbe: Introduction to the Theory of Queues. New York 1962

(186) derselbe: Stochastische Prozesse. München - Wien 1966

(187) TEMPEL, K.H.: Wartezeitmodelle. o.O.o.J. Diss. Göttingen 1964

(188) THEIL, H., BOOT, J.C.G., KLOEK, T.: Operations Research and Quantitative Economics. New York - Toronto - London 1965

(189) THIRUVENGADAM, K., JAISWAL, N.K.: Application of Discrete Transforms to a Queuing Process of Servicing Machines. Operational Research Society of India, 1(1964), S. 87-105

(190) THURMANN, W.H.: Die betriebswirtschaftliche Bedeutung der Mehrstellenarbeit an Gruppen automatischer Maschinen. Automatik, 5(1960), S. 255-260

(191) derselbe: Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen bei mehrstelliger Gruppenarbeit. Automatik, 7(1962), S. 30-34, S. 65-70

(192) TIMME, H.: Mehrstellenarbeit. Ein Vorschlag zur rechnerischen Untersuchung dieser Frage. Zentralblatt f. Arb.wiss.u.soz.Betr.prax., 2(1948), S. 138-141

(193) derselbe: Mehrstellenarbeit. REFA-Nachrichten, 2 (1949), Heft 1, S. 5-6

(194) derselbe: Der Leistungslohn bei gebundener Arbeit. Zentralblatt für Arbeitswissenschaft, 4 (1950), Heft 7, S. 100-102

(195) TIPPET, L.H.C.: Statistical Methods in Textile Research; Uses of the Binomial and Poisson Distributions, J. Text. Inst., 26(1935), S. T 13-T 50

(196) derselbe: Statistical Methods in Textile Research, Part 3 - A Snap-Reading Method of Making Time-Studies of Machines and Operatives in Factory Surveys. J. Text. Inst., 26 (1935), S. T 51

(197) ULBRICHT, J.: Untersuchungen zur Anwendung der Bedienungstheorie auf Probleme der technischen Normung. Fertigungstechnik und Betrieb, 15(1965), S. 203-206

(198) VILLERS, W.: Mehrstellenarbeit in der Arbeits- und Zeitstudie. o.O.o.J., Diss. Aachen 1952

(199) VOGELSTEIN, T.: Das Ertragsgesetz der Industrie. Archiv für Sozialwissenschaft und Sozailpolitik, 34(1912), S. 761-793

(200) WALTER, H.: Über die Bestimmung der "Wege zwischen den Arbeitsstufen bei Vielstellenbedienung". Textil-Praxis, 4(1949), S. 215

(201) WALZ, E.: Verlustzeiten und Wartezeiten bei Mehrmaschinenbedienung. Maschinenbau/Der Betrieb, 16(1937), Heft 1/2, S. 11-14

(202) derselbe: Mehrstellenarbeit. REFA-Nachrichten, 2 (1949), Heft 2, S. 27-28

(203) WEDEKIND, E.: Mehrstellenarbeit. REFA-Nachrichten, 3 (1950), Heft 1, S. 6-12

(204) derselbe: Entwicklung und Ausbau einer betriebswirtschaftlichen Fertigungslehre. ZfhF, NF 6 (1954), S. 436-445

(205) derselbe: Untersuchungen zur Bestimmung der optimalen Arbeitsplatzgröße bei Mehrstuhlarbeit in der Weberei. Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen Nr. 197, Köln und Opladen 1955

(206) derselbe: Arbeitsverteilung an Fertigungsstellen als Maschinenbelegungs- und Arbeitskräfteplanung, sowie -steuerung. Melliand-Textilberichte, 37(1956), Heft 10, S. 1238-1241

(207) derselbe: Der Einfluß der Automatisierung auf die Struktur der Maschinen- und Arbeiterzeiten am mehrstelligen Arbeitsplatz in der Textilindustrie. Forschungsberichte des Wirtschafts- und Verkehrsministeriums Nordrhein-Westfalen. Nr. 631, Köln - Opladen 1958

(208) derselbe: Optimalbedingungen am Arbeitsplatz und im Gesamtbetrieb unter dem Gesichtswinkel der technischen und ökonomischen Ergiebigkeit. Zeitschrift für die gesamte Textilindustrie. 62(1960), S. 429-434

(209) derselbe: Mehrstellenarbeit und Entlohnung. Der Arbeitgeber, 13(1961), S. 446-449

(210) derselbe: Die Plankostenrechnung in der Textilindustrie unter Berücksichtigung des mehrstelligen Arbeitsplatzes. Köln und Opladen 1966

(211) WEDEKIND, H.: Die Bestimmung optimaler Fertigungsbedingungen bei der Mehrmaschinenbedienung. o.O.o.J., Diss. Darmstadt 1963

(212) derselbe: Die Bestimmung optimaler Fertigungsbedingungen bei gleichartiger Mehrstellenarbeit mit Hilfe der Theorie der Warteschlangen. Zeitschrift für die gesamte Textilindustrie. 66(1964), S. 40-48

(213) WEIR, W.F.: Figuring Most Economical Machine Assignment. Fact. Mgmt., 102(1944), S. 100-102

(214) WEYER, G.: Untersuchungen eines deutschen Spezialisten über Mehrmaschinenbedienung. Technische Rundschau, 45(1953), S. 2-3

(215) WILDFEUER, F.: Die Wege- und Beobachtungszeiten in der Ringspinnerei. Textil-Praxis, 13(1958), S. 675-678

(216) derselbe: Die Berechnung der Wegzeiten bei Mehrstellenbedienung. Textil-Praxis, 16(1961), S. 1212-1213

(217) WINKEL, A.: Das Arbeitsschaubild. REFA-Nachrichten, 8(1956), Heft 3, S. 77

(218) derselbe: Mehrstellenarbeit. Im Auftrag des Verbandes für Arbeitsstudien, (REFA e.V.), München 1963

(219) ZUMPE, O.: Mehrstellenfertigung und Leistungsoptimum. Zeitschrift für die gesamte Textilindustrie 54(1952), S. 941-943

8 Einige häufig benutzte Symbole

Zeichen der formalen Logik

$A \Longrightarrow B$	Aus A folgt B; A gilt nur, wenn B gilt; wenn A gilt, dann auch B; B ist eine notwendige Bedingung für A; A ist eine hinreichende Bedingung für B.
$A \Longleftrightarrow B$	Aus A folgt B und aus B folgt A; A gilt genau dann, wenn B gilt; A gilt dann und nur dann, wenn B gilt; A ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für B
$A \wedge B$	A und B; diese Aussage ist genau dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr ist.
$A \vee B$	A oder B; diese Aussage ist genau dann wahr, wenn wenigstens eine der beiden Aussagen A, B wahr ist.
$A:=B$	Der Wert der Größe B soll der Größe A zugewiesen werden.

Symbole der Mengenlehre

A (Menge)	Als "Menge" wird eine Zusammenfassung von bestimmten, definierten Objekten - man nennt sie Elemente der Menge - zu einem Ganzen bezeichnet.
$a \in A$	a ist ein Element der Menge A
$a \notin A$	a ist kein Element der Menge A
$\{a_1, a_2, \ldots\}$	Beschreibung einer Menge unter Kennzeichnung ihrer Elemente

$\{a \mid \ldots \}$ Mit $A = \{a \mid a$ hat die Eigenschaften $e_1, e_2 \ldots\}$ wird die Menge aller Elemente a bezeichnet, die sowohl die Eigenschaft e_1 als auch die Eigenschaft $e_2, \ldots,$ haben.

$\emptyset$ Mit "$\emptyset$" wird die "leere Menge (Nullmenge)" symbolisiert.

$A \subset B$ Mit "$A \subset B$" wird symbolisiert: Eine Menge A sei eine Teilmenge einer Menge B; A sei in B enthalten; B enthält A; jedes Element aus A ist auch ein Element von B;
Es folgt:
$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

$A \cap B$ $= \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$. Durchschnitt zweier Mengen A und B

$A \cup B$ $= \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$. Vereinigung (-smenge) zweier Mengen A und B

Symbole für Ereignisse

$\{A\}$ Das Ereignis A

$\{E\}$ Das sichere Ereignis

$\{A \cup B\}$ Entweder das Ereignis A oder das Ereignis B tritt ein

$\{A \cap B\}$ Sowohl das Ereignis A als auch das Ereignis B treten ein

$\{A \mid B\}$ Das Ereignis A tritt ein unter der Bedingung, daß das Ereignis B bereits eingetreten ist.

$\{A\} \subset \{B\}$ A impliziert B; d.h. wenn A eintritt, tritt auch B ein.
Es folgt
$\{A\} = \{B\} \Leftrightarrow \{A\} \subset \{B\} \wedge \{B\} \subset \{A\}$

9 Anhang

Anhang I:

RECHENZENTRUM DER UNIVERSITAET DES SAARLANDES
EIN MODELL ZUR BERECHNUNG VON ARBEITER- UND
BETRIEBSMITTE.ZEITEN BEI DETERMINISTISCHER
MEHRSTELLENARBEIT

PROBLEMNUMMER	DATUM	BETRIEBSMZAHL	ARBEITERZAHL	PLANPERIODE	SEITE
1000	0 0 1968	4	2	25	1

KONTROLLDRUCK DER EINGELESENEN DATEN

ARBEITSSTELLE	NUTZUNGSZEIT/ME	TAETIGKEITSZEIT/ME	LAUFZEIT
1	7	3	25
2	6	2	25
3	10	4	25
4	4	1	25

PROBLEMNUMMER	DATUM	BETRIEBSMZAHL	ARBEITERZAHL	PLANPERIODE	SEITE
1000	0 0 1968	4	2	25	2

BETRIEBSMITTE.ZEITEN FUER
B E T R I E B S M I T T E . 1 PLANLAUFZEIT 25

ATAKT NUMMER	ARBEITER MIT WARTEZEIT	BRACH ZEIT	NUTZUNGSZEIT TAET	NUTZUNGSZEIT DIFF.	KUMUL ZEIT	
0	0	0	0	0	0	
1	1000000	0	3	4	7	
2	2000001	0	3	4	14	
3	1000000	0	3	4	21	
4	1000000	0	3	4	28	ABBRECHEN
		------	------	------	------	
ZEITSUMMEN		0	12	16	28	
ABZUG		0	+0	-3	25	
ENDGUELTIG		0	12	13	25	
PROZENTSATZ		.00	48.00	52.00	100.00	

PROBLEMNUMMER	DATUM	BETRIEBSMZAHL	ARBEITERZAHL	PLANPERIODE	SEITE
1000	0 0 1968	4	2	25	3

BETRIEBSMITTE.ZEITEN FUER
B E T R I E B S M I T T E _ 2 PLANLAUFZEIT 25

ATAKT NUMMER	ARBEITER MIT WARTEZEIT	BRACH ZEIT	NUTZUNGSZEIT TAET	NUTZUNGSZEIT DIFF.	KUMU_ ZEIT	
0	0	0	0	0	0	
1	2000000	0	2	4	6	
2	1000002	0	2	4	12	
3	1000003	0	2	4	18	
4	1000001	0	2	4	24	
5	1000000	0	2	4	30	ABBRECHEN
ZEITSUMMEN		0	10	20	30	
ABZUG		0	-1	-4	25	
ENDGUELTIG		0	9	16	25	
PROZENTSATZ		.00	36.00	64.00	100.00	

PROBLEMNUMMER	DATUM	BETRIEBSMZAHL	ARBEITERZAHL	PLANPERIODE	SEITE
1000	0 0 1968	4	2	25	4

BETRIEBSMITTE.ZEITEN FUER
B E T R I E B S M I T T E _ 3 PLANLAUFZEIT 25

ATAKT NUMMER	ARBEITER MIT WARTEZEIT	BRACH ZEIT	NUTZUNGSZEIT TAET	NUTZUNGSZEIT DIFF.	KUMU_ ZEIT	
0	0	0	0	0	0	
1	2000000	2	4	6	12	
2	2000002	0	4	6	22	
3	2000005	0	4	6	32	ABBRECHEN
ZEITSUMMEN		2	12	18	32	
ABZUG		0	-1	-6	25	
ENDGUELTIG		2	11	12	25	
PROZENTSATZ		8.00	44.00	48.00	100.00	

PROBLEMNUMMER 1000 | DATUM 0 0 1968 | BETRIEBSMZAHL 4 | ARBEITERZAHL 2 | PLANPERIODE 25 | SEITE 5

BETRIEBSMITTEL-ZEITEN FUER
B E T R I E B S M I T T E L 4 PLANLAUFZEIT 25

ATAKT NUMMER	ARBEITER MIT WARTEZEIT	BRACH ZEIT	NUTZUNGSZEIT TAET	DIFF.	KUMUL ZEIT
0	0	0	0	0	0
1	1000000	3	1	3	7
2	1000000	1	1	3	12
3	2000000	4	1	3	20
4	1000000	0	1	3	24
		----- +	---- +	----- =	------
ZEITSUMMEN		8	4	12	24
UNTAETIG		+1	0	0	25
ENDGUELTIG		9	4	12	25
PROZENTSATZ		36.00	16.00	48.00	100.00

PROBLEMNUMMER 1000 | DATUM 0 0 1968 | BETRIEBSMZAHL 4 | ARBEITERZAHL 2 | PLANPERIODE 25 | SEITE 6

ARBEITERZEITEN FUER
A R B E I T E R 1

ATAKT NUMMER	BETRIEBSMIT U BRACHZEIT	WARTE ZEIT	TAET ZEIT	KUMUL ZEIT	
0	0	0	0	0	
1	1000000	0	3	3	
2	4000003	0	1	4	
3	2000000	2	2	8	
4	4000001	0	1	9	
5	2000000	3	2	14	
6	1000000	0	3	17	
7	2000000	1	2	20	
8	4000000	0	1	21	
9	1000000	0	3	24	
10	2000000	0	2	26	ABBRECHEN
		----- +	---- =	-----	
ZEITSUMMEN		6	20	26	
ABZUG		0	-1	25	
ENDGUELTIG		6	19	25	
PROZENTSATZ		24.00	76.00	100.00	

PROBLEMNUMMER	DATUM	BETRIEBSANZAHL	ARBEITERZAHL	PLANPERIODE	SEITE
1000	0 0 1968	4	2	25	7

ARBEITERZEITEN FUER
A R B E I T E R 2

TAKT NUMMER	BETRIEBSMIT U BRACHZEIT	WARTE ZEIT	TAET ZEIT	KUMUL ZEIT	
0	0	0	0	0	
1	2000000	0	2	2	
2	3000002	0	4	6	
3	1000000	1	3	10	
4	3000000	2	4	16	
5	4000004	0	1	17	
6	3000000	5	4	26	ABBRECHEN
		----- +	---- =	-----	
ZEITSUMMEN		8	18	26	
ABZUG		0	-1	25	
ENDGUELTIG		8	17	25	
PROZENTSATZ		32.00	68.00	100.00	

PROGRAMMENDE MEHRSTELLENARBEIT. PROBNR. 1000

Anhang II: Beispiel zur Gewinnmaximierung bei deterministischer Mehrstellenarbeit

1. Daten:

Ein Arbeitsplatz besteht aus 8 Aggregaten unterschiedlichen Typs und unterschiedlichen Baujahrs. Auf diesen Aggregaten werden drei verschiedene Produkte erzeugt. Die Zuteilung der Produkte auf die Aggregate wurde dabei wie folgt geplant.

Aggregat gruppe	Aggregat	Produkt
I	A	1
	B	1
	C	1
II	D	2
	E	2
	F	2
III	G	3
	H	3

Die Maschinen in der Aggregatgruppe I und II sind jeweils alle gleichen Typs und gleichen Baujahrs. Lediglich die Gruppe III besteht aus zwei Maschinen unterschiedlichen Baujahrs. Die Maschine H ist ein älterer Typ und hat im Vergleich zu Maschine G erheblich längere Fertigungs- und Bedienungszeiten, sowie höhere Kostensätze.

Maschinenzeiten und Kosten:

Teilzeit	HM/10 Stück	DM/Min	DM/10Stück
t_h	822	0,874	7,184
t_n	122	0,035	0,043
t_N	944	-	7,227
Kostensatz für 100 HM Brachzeit: 0,035 [DM/Min]			

Aggregatgruppe I

Teilzeit	HM/10 Stück	DM/Min	DM/10 Stück
t_h	1432	0,620	8,878
t_n	456	0,025	0,114
t_N	1888	-	8,992
Kostensatz für 100 HM Brachzeit: 0,025 [DM/Min]			

Aggregatgruppe II

Teilzeit	HM/Stück	DM/Min	DM/Stück
t_h	790	0,37	2,923
t_n	110	0,02	0,022
t_N	900	-	2,945
Kostensatz für 100 HM Brachzeit: 0,02 [DM/Min]			

Aggregat G

Teilzeit	HM/Stück	DM/Min	DM/Stück
t_h	850	0,42	3,57
t_n	185	0,025	0,046
t_N	1035		3,616
Kostensatz für 100 HM Brachzeit: 0,025 [DM/Min]			

Aggregat H

Arbeiterzeiten und Kosten:

Teilzeit	HM/10 Stück	DM/Min	DM/10 Stück
t_{kh}	32	0,14	0,045
t_{kn}	122	0,14	0,171
$t_ü$	16	0,14	0,022
t_l	50	0,14	0,070
t_t	220	0,14	0,308
Kostensatz für 100 HM Wartezeit: 0,14 [DM/Min]			

Aggregatgruppe I: Zeitlohn

Teilzeit	HM/10 Stück	DM/Min	DM/10 Stück
t_{kh}	86	0,14	0,120
t_{kn}	456	0,14	0,638
$t_ü$	22	0,14	0,031
t_l	50	0,14	0,070
t_t	614	0,14	0,860
Kostensatz für 100 HM Wartezeit: 0,14 [DM/Min]			

Aggregatgruppe II: Zeitlohn

Teilzeit	HM/Stück	DM/Min	DM/Stück
t_{kh}	75	0,14	0,105
t_{kn}	110	0,14	0,154
$t_{ü}$	15	0,14	0,021
t_{l}	50	0,14	0,070
t_{t}	250	0,14	0,350
Kostensatz für 100 HM Wartezeit: 0,14 [DM/Min]			

Aggregat G: Zeitlohn

Teilzeit	HM/Stück	DM/Min	DM/Stück
t_{kh}	90	0,14	0,126
t_{kn}	185	0,14	0,259
$t_{ü}$	17	0,14	0,024
t_{l}	50	0,14	0,070
t_{t}	342	0,14	0,479
Kostensatz für 100 HM Wartezeit: 0,14 [DM/Min]			

Aggregat H: Zeitlohn

Teilzeit	HM/10 Stück		DM/Min	DM/10 Stück
t_{kh}	32	0 % beeinflußbar	0,161	0,052
t_{kn}	122	100 % beeinflußbar	0,161	0,196
$t_{ü}$	16	0 % beeinflußbar	0,161	0,026
t_{l}	50	100 % beeinflußbar	0,161	0,081
t_{t}	220		0,161	0,355
Kostensatz für 100 HM Wartezeit: 0,161 [DM/Min]				

Aggregatgruppe I: Akkordlohn;
Vorgabezeit bei Normalleistungsgrad

Teilzeit	HM/10 Stück		DM/Min	DM/10 Stück
t_{kh}	86	25 % beeinflußbar	0,161	0,138
t_{kn}	456	100 % beeinflußbar	0,161	0,734
$t_{ü}$	22	0 % beeinflußbar	0,161	0,035
t_{l}	50	100 % beeinflußbar	0,161	0,081
t_{t}	614		0,161	0,989
Kostensatz für 100 HM Wartezeit: 0,161 [DM/Min]				

Aggregatgruppe II: Akkordlohn;
Vorgabezeit bei Normalleistungsgrad

Teilzeit	HM/Stück		DM/Min	DM/Stück
t_{kh}	75	0 % beeinflußbar	0,161	0,121
t_{kn}	110	100 % beeinflußbar	0,161	0,177
$t_{ü}$	15	0 % beeinflußbar	0,161	0,024
t_{l}	50	100 % beeinflußbar	0,161	0,081
t_{t}	250		0,161	0,403
Kostensatz für 100 HM Wartezeit: 0,161 [DM/Min]				

Aggregat G: Akkordlohn;
Vorgabezeit bei Normalleistungsgrad

Teilzeit	HM/Stück		DM/Min	DM/Stück
t_{kh}	90	10 % beeinflußbar	0,161	0,145
t_{kn}	185	100 % beeinflußbar	0,161	0,298
$t_{ü}$	17	0 % beeinflußbar	0,161	0,027
t_{l}	50	100 % beeinflußbar	0,161	0,081
t_{t}	342		0,161	0,551
Kostensatz für 100 HM Wartezeit: 0,161 [DM/Min]				

Aggregat H: Akkordlohn;
Vorgabezeit bei Normalleistungsgrad

Selbstkosten und Deckungsbeiträge:

Produkt	1	2	3 G	3 H
	DM/10Stück	DM/10Stück	DM/Stück	DM/Stück
Kosten d. Arbeitsplatzes	7,535	9,852	3,295	4,095
+ Sonstige Kosten	6,435	4,827	1,320	1,320
= Selbstkosten (prop.)	13,970	14,679	4,615	5,415
Erlös	18,500	19,800	11,500	11,500
Deckungsbeitrag, absolut	4,530	5,121	6,885	6,085
Deckungsbeitrag/Min. Nutzungszeit	0,480	0,271	0,762	0,588
Deckungsbeitrag/Min. Tätigkeitszeit	2,059	0,834	2,754	1,779

Deckungsbeiträge: Zeitlohn

Produkt	1	2	3 G	3 H
	DM/10Stück	DM/10Stück	DM/Stück	DM/Stück
Kosten d. Arbeitsplatzes	7,581	9,981	3,348	4,167
+ Sonstige Kosten	6,435	4,827	1,320	1,320
= Selbstkosten (prop.)	14,016	14,808	4,668	5,487
Erlös	18,500	19,800	11,500	11,500
Deckungsbeitrag, absolut	4,484	4,992	6,832	6,013
Deckungsbeitrag/Min. Nutzungszeit	0,475	0,264	0,759	0,581
Deckungsbeitrag/Min. Tätigkeitszeit	2,038	0,813	2,733	1,758

Deckungsbeiträge: Akkordlohn

T ä t i g k e i t s z e i t e n in Abhängigkeit vom Leistungsgrad

Produkt / λ	1	2	3 G	3 H
100	220	614	250	342
110	204	566	235	320
120	191	526	223	301
130	180	492	213	286
140	171	463	204	272
150	163	438	197	261

N u t z u n g s z e i t e n in Abhängigkeit vom Leistungsgrad

Produkt / λ	1	2	3 G	3 H
100	944	1888	900	1035
110	933	1847	890	1018
120	924	1812	882	1004
130	916	1783	875	992
140	909	1758	869	982
150	903	1736	863	973

2. Lösung:

Es hat sich gezeigt, daß die Indizierung der Maschinen nach der Höhe der Deckungsbeiträge pro Tätigkeitszeit hier zu besseren Ergebnissen führt. Aus diesem Grunde wird für die Entlohnung im Akkord nur diese Lösung angegeben. Für die Entlohnung nach Zeit werden zum Vergleich beide Lösungen aufgezeigt.

21. Entlohnung nach der Zeit; Indizierung der Aggregate nach Deckungsbeitrag pro Nutzungszeit

Aggregatindex	A	1		2		3		4	
	Wert Min	T_N	Wert	T_N	Wert	T_N	Wert	T_N	Wert
1	0,762	431,38	328,71	381,32	290,57	466,58	355,53	459,oo	349,76
2	0,588	372,60	219,08	435,52	256,09	476,20	280,01	478,83	281,55
3	0,480	336,28	161,41	396,48	190,31	474,61	227,81	480,oo	230,40
4	0,480	334,08	160,36	395,17	189,68	472,34	226,72	478,90	229,87
5	0,480	331,88	159,30	394,66	189,44	469,59	225,40	477,80	229,34
6	0,271	0	0	396,06	107,33	475,18	128,77	477,80	129,48
7	0,271	0	0	395,29	107,12	469,04	127,11	476,70	129,19
8	0,271	0	0	383,53	103,94	462,63	125,37	475,60	128,89
Aggregatindex	Wert Min	T_{Ba}	Wert	T_{Ba}	Wert	T_{Ba}	Wert	T_{Ba}	Wert
1	-0,02	48,62	-0,97	98,68	-1,97	13,42	-0,27	21,oo	- 0,42
2	-0,025	107,40	-2,69	44,48	-1,11	3,80	-0,10	1,17	- 0,03
3	-0,035	143,72	-5,03	83,52	-2,92	5,39	-0,19	0	- 0
4	-0,035	145,92	-5,11	84,83	-2,97	7,66	-0,27	1,10	- 0,04
5	-0,035	148,12	-5,18	85,34	-2,99	10,41	-0,36	2,20	- 0,08
6	-0,025	480,oo	-12,oo	83,94	-2,10	4,82	-0,12	2,20	- 0,66
7	-0,025	480,oo	-12,oo	84,71	-2,12	10,96	-0,27	3,30	- 0,08
8	-0,025	480,oo	-12,oo	96,47	-2,41	17,37	-0,43	4,40	- 0,11
Arbeiterindex	Wert Min	T_W	Wert	T_W	Wert	T_W	Wert	T_W	Wert
1	-0,14	0	0	21,oo	-2,94	64,68	-9,05	94,60	-13,24
2	-0,14	-	-	23,23	-3,25	98,76	-13,83	148,98	-20,86
3	-0,14	-	-	-	-	192,92	-27,01	238,54	-33,40
4	-0,14	-	-	-	-	-	-	339,13	-47,48
Summe	-	-	973,88	-	1409,70	-	1644,82	-	1592,70

Zeitangaben in [Min]; Wertangaben in [DM]

22. Entlohnung nach der Zeit; Indizierung der Aggregate nach Deckungsbeitrag pro Tätigkeitszeit

Aggregatindex	A	1		2		3		4	
	Wert/Min	T_N	Wert	T_N	Wert	T_N	Wert	T_N	Wert
1	0,762	432,oo	329,18	428,67	326,65	468,oo	356,62	459,54	350,17
2	0,480	339,84	163,12	407,16	195,44	476,54	228,74	480,oo	230,40
3	0,480	337,50	162,oo	405,92	194,84	473,93	227,49	480,oo	230,40
4	0,480	335,30	160,94	404,35	194,09	470,06	225,63	478,93	229,87
5	0,588	374,95	220,47	437,87	257,47	476,67	280,28	476,44	280,15
6	0,271	0	0	415,36	112,56	476,40	129,10	477,80	129,48
7	0,271	0	0	410,oo	111,11	470,26	127,44	477,80	129,48
8	0,271	0	0	413,86	112,16	463,69	125,66	476,73	129,19
Aggregatindex	Wert/Min	T_{Ba}	Wert	T_{Ba}	Wert	T_{Ba}	Wert	T_{Ba}	Wert
1	-0,02	48,oo	-0,96	51,33	-1,03	12,oo	-0,24	20,46	-0,41
2	-0,035	140,16	-4,91	72,84	-2,55	3,46	-0,12	0	-0
3	-0,035	142,50	-4,99	74,08	-2,59	6,07	-0,21	0	-0
4	-0,035	144,70	-5,06	75,65	-2,65	9,94	-0,35	1,07	-0,04
5	-0,025	115,05	-2,88	42,13	-1,05	3,33	-0,08	3,56	-0,09
6	-0,025	480,oo	-12,oo	64,64	-1,62	3,60	-0,09	2,20	-0,06
7	-0,025	480,oo	-12,oo	70,oo	-1,75	9,74	-0,24	2,20	-0,06
8	-0,025	480,oo	-12,oo	76,14	-1,90	16,31	-0,41	3,27	-0,08
Arbeiterindex	Wert/Min	T_W	Wert	T_W	Wert	T_W	Wert	T_W	Wert
1	-0,14	0	-0	1,29	-0,18	61,11	-8,56	143,43	-20,08
2	-0,14	-	-	1,62	-0,23	123,48	-17,29	186,34	-26,09
3	-0,14	-	-	-	-	168,49	-23,59	206,06	-28,85
4	-0,14	-	-	-	-	-	-	285,38	-39,95
Summe	-	-	980,93	-	1488,76	-	1649,78	-	1593,47

Zeitangaben in [Min]; Wertangaben in [DM]

23. Entlohnung im Akkord; Leistungsgrad 100 %; Indizierung der Aggregate nach Deckungsbeitrag pro Tätigkeitszeit

λ =100	A	1		2		3		4	
Aggregatindex	Wert/Min	T_N	Wert	T_N	Wert	T_N	Wert	T_N	Wert
1	0,759	432,oo	327,89	428,67	325,36	468,oo	355,21	459,54	348,79
2	0,475	339,84	161,42	407,16	193,40	476,54	226,36	480,oo	228,oo
3	0,475	337,50	160,31	405,12	192,81	473,93	225,12	480,oo	228,oo
4	0,475	335,30	159,27	404,35	192,07	470,06	223,28	478,93	227,49
5	0,581	374,95	217,85	437,87	254,40	476,67	276,95	476,44	276,81
6	0,264	0	0	415,36	109,66	476,40	125,77	477,80	126,14
7	0,264	0	0	410,oo	108,24	470,26	124,15	477,80	126,14
8	0,264	0	0	413,86	109,26	463,69	122,41	476,73	125,86
Aggregatindex	Wert/Min	T_{Ba}	Wert	T_{Ba}	Wert	T_{Ba}	Wert	T_{Ba}	Wert
1	-0,02	48,oo	-0,96	51,33	-1,03	12,oo	-0,24	20,46	-0,41
2	-0,035	140,16	-4,91	72,84	-2,55	3,46	-0,12	0	-0
3	-0,035	142,50	-4,99	74,08	-2,59	6,07	-0,21	0	-0
4	-0,035	144,70	-5,06	75,65	-2,65	9,94	-0,35	1,07	-0,04
5	-0,025	115,05	-2,88	42,13	-1,05	3,33	-0,08	3,56	-0,09
6	-0,025	480,oo	-12,oo	64,64	-1,62	3,60	-0,09	2,20	-0,06
7	-0,025	480,oo	-12,oo	70,oo	-1,75	9,74	-0,24	2,20	-0,06
8	-0,025	480,oo	-12,oo	76,14	-1,90	16,31	-0,41	3,27	-0,08
Arbeiterindex	Wert/Min	T_W	Wert	T_W	Wert	T_W	Wert	T_W	Wert
1	-0,161	0	-0	1,29	-0,21	61,11	-9,84	143,43	-23,09
2	-0,161	-	-	1,62	-0,26	123,48	-19,88	186,34	-30,oo
3	-0,161	-	-	-	-	168,49	-27,13	206,o6	-33,18
4	-0,161	-	-	-	-	-	-	285,38	-45,95
Summe	-	-	971,94	-	1469,59	-	1620,66	-	1554,27

Zeitangaben in [Min]; Wertangaben in [DM]

24. Entlohnung im Akkord; Leistungsgrad 110 %; Indizierung der Aggregate nach Deckungsbeitrag pro Tätigkeitszeit

λ =110	A	1		2		3		4	
Aggregatindex	Wert Min	T_N	Wert	T_N	Wert	T_N	Wert	T_N	Wert
1	0,759	366,43	278,12	404,80	307,24	464,49	352,55	460,38	349,43
2	0,475	382,53	181,70	423,22	201,03	474,52	225,40	480,oo	228,oo
3	0,475	382,01	181,45	421,20	200,07	473,60	224,96	480,oo	228,oo
4	0,475	379,97	180,49	419,85	199,43	472,48	224,43	480,oo	228,oo
5	0,581	411,93	239,33	455,42	264,60	476,37	276,77	477,16	277,23
6	0,264	0	0	452,33	119,42	476,79	125,87	473,59	125,03
7	0,264	0	0	445,23	117,54	466,81	123,24	473,21	124,93
8	0,264	0	0	440,01	116,16	466,48	123,15	473,21	124,93
Aggregatindex	Wert Min	T_{Ba}	Wert	T_{Ba}	Wert	T_{Ba}	Wert	T_{Ba}	Wert
1	-0,02	113,57	-2,27	75,20	-1,50	15,51	-0,31	19,62	-0,39
2	-0,035	97,47	-3,41	56,78	-1,99	5,48	-0,19	0	-0
3	-0,035	97,99	-3,43	58,80	-2,06	6,40	-0,22	0	-0
4	-0,035	100,03	-3,50	60,15	-2,11	7,52	-0,26	0	-0
5	-0,025	68,07	-1,70	24,58	-0,61	3,63	-0,09	2,04	-0,05
6	-0,025	480,oo	-12,oo	27,67	-0,69	3,21	-0,08	6,41	-0,16
7	-0,025	480,oo	-12,oo	34,77	-0,87	13,19	-0,33	6,79	-0,17
8	-0,025	480,oo	-12,oo	39,99	-1,oo	13,52	-0,34	6,79	-0,17
Arbeiterindex	Wert Min	T_W	Wert	T_W	Wert	T_W	Wert	T_W	Wert
1	-0,161	0	-0	6,73	-1,08	95,84	-15,43	154,60	-24,89
2	-0,161	-	-	7,25	-1,17	133,64	-21,52	198,11	-31,90
3	-0,161	-	-	-	-	184,16	-29,65	239,10	-38,50
4	-0,161	-	-	-	-	-	-	295,87	-47,64
Summe	-	-	1010,78	-	1512,41	-	1607,95	-	1541,68

Zeitangaben in [Min]; Wertangaben in [DM]

25. Entlohnung im Akkord; Leistungsgrad λ = 120 %; Indizierung der Aggregate nach Deckungsbeitrag pro Tätigkeitszeit

λ =120	A	1		2		3		4	
Aggregatindex	Wert/Min	T_N	Wert	T_N	Wert	T_N	Wert	T_N	Wert
1	0,759	387,55	294,15	415,11	315,07	472,49	358,62	462,36	350,93
2	0,475	403,38	191,61	434,28	206,28	478,18	227,14	480,oo	228,oo
3	0,475	401,47	190,70	432,74	205,55	474,04	225,17	480,oo	228,oo
4	0,475	399,56	189,79	431,83	205,12	473,75	225,03	480,oo	228,oo
5	0,581	432,05	251,02	465,42	270,41	477,40	277,37	477,39	277,36
6	0,264	0	0	468,03	123,56	477,03	125,94	469,45	123,93
7	0,264	0	0	460,93	121,69	469,43	123,93	469,09	123,84
8	0,264	0	0	455,67	120,30	464,17	122,54	469,09	123,84
Aggregatindex	Wert/Min	T_{Ba}	Wert	T_{Ba}	Wert	T_{Ba}	Wert	T_{Ba}	Wert
1	-0,02	92,45	-1,85	64,89	-1,30	7,51	-0,15	17,64	-0,35
2	-0,035	76,62	-2,68	45,72	-1,60	1,82	-0,06	0	-0
3	-0,035	78,53	-2,75	47,26	-1,65	5,96	-0,21	0	-0
4	-0,035	80,44	-2,81	49,17	-1,72	6,25	-0,22	0	-0
5	-0,025	47,95	-1,20	14,58	-0,36	2,60	-0,07	2,61	-0,07
6	-0,025	480,oo	-12,oo	11,97	-0,30	2,97	-0,07	10,55	-0,26
7	-0,025	480,oo	-12,oo	19,07	-0,48	10,57	-0,26	10,91	-0,27
8	-0,025	480,oo	-12,oo	24,33	-0,61	15,83	-0,40	10,91	-0,27
Arbeiterindex	Wert/Min	T_W	Wert	T_W	Wert	T_W	Wert	T_W	Wert
1	-0,161	0	-0	24,30	-3,91	100,30	-16,15	178,76	-28,78
2	-0,161	-	-	11,85	-1,91	148,68	-23,94	221,70	-35,69
3	-0,161	-	-	-	-	212,62	-34,23	262,87	-42,32
4	-0,161	-	-	-	-	-	-	285,76	-46,01
Summe	-	-	1069,98	-	1554,14	-	1609,98	-	1529,88

Zeitangaben in [Min]; Wertangaben in [DM]

26. Entlohnung im Akkord; Leistungsgrad λ = 130 %; Indizierung der Aggregate nach Deckungsbeitrag pro Tätigkeitszeit

λ =130	A	1		2		3		4	
Aggregatindex	Wert / Min	T_N	Wert	T_N	Wert	T_N	Wert	T_N	Wert
1	0,759	404,56	307,61	427,30	324,32	471,63	357,97	477,91	362,73
2	0,475	422,52	200,70	444,54	211,16	479,60	227,81	480,oo	228,oo
3	0,475	420,72	199,84	442,74	210,30	476,28	226,23	478,20	227,15
4	0,475	418,92	198,99	440,94	209,45	474,38	225,33	476,40	226,29
5	0,581	451,32	262,22	465,41	270,40	476,98	277,13	478,20	277,83
6	0,264	0	0	468,49	123,68	477,71	126,12	478,20	126,24
7	0,264	0	0	462,57	122,38	472,79	124,82	473,96	125,13
8	0,264	0	0	457,97	120,94	467,87	123,52	471,15	124,38
Aggregatindex	Wert / Min	T_{Ba}	Wert	T_{Ba}	Wert	T_{Ba}	Wert	T_{Ba}	Wert
1	-0,02	75,44	-1,51	52,70	-1,05	8,37	- 0,17	2,09	-0,04
2	-0,035	57,48	-2,01	35,46	-1,24	0,40	- 0,01	0	-0
3	-0,035	59,28	-2,07	37,26	-1,30	3,72	- 0,13	1,80	-0,06
4	-0,035	61,08	-2,14	39,06	-1,37	5,62	- 0,20	3,60	-0,13
5	-0,025	28,68	-0,72	14,59	-0,36	3,02	- 0,08	1,80	-0,05
6	-0,025	480,oo	-12,oo	11,51	-0,29	2,29	- 0,06	1,80	-0,05
7	-0,025	480,oo	-12,oo	16,43	-0,41	7,21	- 0,18	6,04	-0,15
8	-0,025	480,oo	-12,oo	22,03	-0,55	12,13	- 0,30	8,85	-0,22
Arbeiterindex	Wert / Min	T_W	Wert	T_W	Wert	T_W	Wert	T_W	Wert
1	-0,161	0	-0	28,01	-4,51	101,85	-16,40	157,03	
2	-0,161	-	-	40,47	-6,52	159,43	-25,67	198,78	
3	-0,161	-	-	-	-	245,11	-39,47	272,55	
4	-0,161	-	-	-	-	-	-	352,17	
Summe	-	-	1124,91	-	1575,03	-	1606,26	-	1539,19

Zeitangaben in [Min]; Wertangaben in [DM]

27. Entlohnung im Akkord; Leistungsgrad λ = 140 %; Indizierung der Aggregate nach Deckungsbeitrag pro Tätigkeitszeit

λ =140	A	1		2		3		4	
Aggregatindex	Wert/Min	T_N	Wert	T_N	Wert	T_N	Wert	T_N	Wert
1	0,759	422,40	320,60	425,81	323,19	471,38	358,12	476,96	362,01
2	0,475	439,56	208,79	444,55	211,16	479,85	227,93	480,oo	228,oo
3	0,475	437,85	207,98	442,84	210,35	476,31	226,25	477,69	226,90
4	0,475	436,32	207,25	441,13	209,54	474,60	225,44	474,44	225,36
5	0,581	469,54	272,80	473,40	275,05	478,03	277,74	477,63	277,50
6	0,264	0	0	473,02	124,88	477,96	126,18	478,16	126,23
7	0,264	0	0	466,22	123,08	472,98	124,87	474,69	125,32
8	0,264	0	0	461,59	121,86	467,70	123,47	471,78	124,55
Aggregatindex	Wert/Min	T_{Ba}	Wert	T_{Ba}	Wert	T_{Ba}	Wert	T_{Ba}	Wert
1	-0,02	57,60	-1,15	54,19	-1,08	8,62	-0,17	3,04	-0,06
2	-0,035	40,44	-1,42	35,45	-1,24	0,15	-0,01	0	-0
3	-0,035	42,15	-1,48	37,16	-1,30	3,69	-0,13	2,31	-0,08
4	-0,035	43,68	-1,53	38,87	-1,36	5,40	-0,19	5,56	-0,19
5	-0,025	10,46	-0,26	6,60	-0,17	1,97	-0,05	2,37	-0,06
6	-0,025	480,oo	-12,oo	6,98	-0,17	2,04	-0,05	1,84	-0,05
7	-0,025	480,oo	-12,oo	13,78	-0,34	7,02	-0,18	5,31	-0,13
8	-0,025	480,oo	-12,oo	18,41	-0,46	12,30	-0,31	8,22	-0,21
Arbeiterindex	Wert/Min	T_W	Wert	T_W	Wert	T_W	Wert	T_W	Wert
1	-0,161	0	-0	49,03	-7,89	114,84	-18,41	147,07	-23,68
2	-0,161	-	-	52,13	-8,39	169,80	-27,34	215,81	-34,75
3	-0,161	-	-	-	-	259,66	-41,81	309,51	-49,83
4	-0,161	-	-	-	-	-	-	351,68	-56,62
Summe	-	-	1175,58	-	1576,71	-	1601,27	-	1530,21

Zeitangaben in [Min]; Wertangaben in [DM]

28. Entlohnung im Akkord; Leistungsgrad λ = 150 %; Indizierung der Aggregate nach Deckungsbeitrag pro Tätigkeitszeit

λ =150	A	1		2		3		4	
Aggregatindex	Wert/Min	T_N	Wert	T_N	Wert	T_N	Wert	T_N	Wert
1	0,759	400,65	304,09	428,44	325,19	472,40	358,55	475,72	361,07
2	0,475	417,08	198,11	445,67	211,69	478,49	227,28	480,oo	228,oo
3	0,475	415,45	197,34	444,04	210,92	476,86	226,51	478,26	227,17
4	0,475	415,38	197,31	442,56	210,22	475,17	225,71	476,16	226,18
5	0,581	223,79	130,02	474,12	275,46	477,25	277,28	478,21	277,84
6	0,264	389,97	102,95	473,19	124,92	478,03	126,20	478,13	126,23
7	0,264	0	0	467,66	123,46	471,84	124,57	474,17	125,18
8	0,264	0	0	461,65	121,88	466,36	123,12	473,75	125,07
Aggregatindex	Wert/Min	T_{Ba}	Wert	T_{Ba}	Wert	T_{Ba}	Wert	T_{Ba}	Wert
1	-0,02	79,35	-1,59	51,56	-1,03	7,60	-0,15	4,28	-0,09
2	-0,035	62,92	-2,20	34,33	-1,20	1,51	-0,05	0	-0
3	-0,035	64,55	-2,26	35,96	-1,26	3,14	-0,11	1,74	-0,06
4	-0,035	64,62	-2,26	37,44	-1,31	4,83	-0,17	3,84	-0,13
5	-0,025	256,21	-6,41	5,88	-0,15	2,75	-0,07	1,79	-0,04
6	-0,025	90,03	-2,25	6,81	-0,17	1,97	-0,05	1,87	-0,05
7	-0,025	480,oo	-12,oo	12,34	-0,31	8,16	-0,20	5,83	-0,15
8	-0,025	480,oo	-12,oo	18,35	-0,46	13,64	-0,34	6,25	-0,16
Arbeiterindex	Wert/Min	T_W	Wert	T_W	Wert	T_W	Wert	T_W	Wert
1	-0,161	0	-0	61,56	-9,91	120,44	-19,39	169,61	-27,31
2	-0,161	-	-	69,99	-11,27	186,33	-30,oo	229,62	-36,97
3	-0,161	-	-	-	-	275,06	-44,28	290,72	-46,81
4	-0,161	-	-	-	-	-	-	362,80	-58,41
Summe	-	-	1088,85	-	1576,67	-	1594,41	-	1526,56

Zeitangaben in [Min]; Wertangaben in [DM]

3. Zusammenfassung der Lösungen:

Arbeiteranzahl			1	2	3 (Optimum)	4
Zeitlohn	Krit.:	$\frac{\text{Deckungsbeitrag}}{\text{Nutzungszeit}}$	973,88	1409,70	1644,82	1592,70
	Krit.:	$\frac{\text{Deckungsbeitrag}}{\text{Tätigkeitszeit}}$	980,93	1488,76	1649,78	1593,47
Akkordlohn	$\lambda = 100$	Kriterium: $\frac{\text{Deckungsbeitrag}}{\text{Tätigkeitszeit}}$	971,94	1469,59	1620,66	1554,27
	$\lambda = 110$		1010,78	1512,41	1607,95	1541,68
	$\lambda = 120$		1069,98	1554,14	1609,98	1529,88
	$\lambda = 130$		1124,91	1575,03	1606,26	1539,19
	$\lambda = 140$		1175,58	1576,71	1601,27	1530,21
	$\lambda = 150$		1088,85	1576,67	1594,41	1526,56

Gewinn in Abhängigkeit der Arbeiteranzahl